

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA WYDZIAŁ BUDOWNICTWA LĄDOWEGO I WODNEGO



ANTONI BIEGUS

PROJEKTOWANIE KONSTRUKCJI STALOWYCH WEDŁUG EUROKODU 3

CZĘŚĆ 7 – ELEMENTY ŚCISKANE

WYKŁADY

WROCŁAW 2012

ANTONI BIEGUS

PROJEKTOWANIE KONSTRUKCJI STALOWYCH WEDŁUG EUROKODU 3 CZĘŚC 2 – ELEMENTY ŚCISKANE

SPIS TREŚCI

1. Wprowadzenie	4
2. Wybrane zagadnienia stateczności prętów ściskanych	7
3. Długości wyboczeniowe i smukłości prętów ściskanych	11
4. Pręty jednogałęziowe ściskane osiowo	19
5. Współczynnik wyboczeniowy	26
6. Nośność jednogałęziowych prętów ściskanych osiowo	32
7. Nośność jednogałęziowych prętów ściskanych i zginanych	35
8. Nośność wielogałęziowych prętów ściskanych osiowo	40
9. Przekroje poprzeczne trzonów słupów	48
10. Projektowanie trzonów słupów	52
10.1. Wiadomości ogólne dotyczące projektowania słupów	52
10.2. Obliczanie trzonów słupów jednogałęziowych ściskanych osiowo	55
10.3. Obliczanie trzonów słupów wielogałęziowych ściskanych osiowo	56
10.4. Projektowanie głowic słupów	60
10.5. Projektowanie podstaw słupów	63
10.6. Zakotwienie słupów w fundamencie	71
Literatura	78

PODZIĘKOWANIE

Autor serdecznie dziękuje Panu dr. inż. Dariuszowi Czepiżakowi za trud korekty pracy i wniesione uwagi redakcyjne oraz merytoryczne

Elementy ściskane

1. Wprowadzenie

Sciskane ustroje prętowe 1 (rys. 1) są często występującymi elementami metalowych konstrukcji budowlanych. Klasycznym ich przykładem są słupy (rys. 1a, c, d). Głównym zadaniem konstrukcyjnym słupów w budynkach (rys. 1a) i budowlach inżynierskich (rys. 1c, d) jest przekazanie obciążeń z elementów położonych wyżej, na niżej położone ustroje nośne budynku lub na fundamenty. Słupy są nie tylko elementami ram parterowych (rys. 1c) i szkieletów wielokondygnacyjnych budynków (rys. 1a), ale także są podporami konstrukcji inżynierskich np. zbiorników wieżowych (rys. 1d), silosów, rurociągów, estakad itp.

Pręty ściskane występują również jako elementy składowe kratownic płaskich i przestrzennych (pasy, słupki, krzyżulce - rys. 1b), kopuł prętowych, stężeń dachowych i ściennych hal (rys. 1c), wież, masztów itp.

Zagadnienia nośności i kształtowania konstrukcyjnego większości wymienionych elementów ściskanych oraz stosowanych modeli obliczeniowych szacowania ich wytężenia będą omówione na przykładzie słupów budynków.



Rys. 1. Przykłady konstrukcji, w których występują elementy ściskane (1): a – szkielet budynku wielokondygnacyjnego, b – kratownica, c – ustrój nośny hali, d – zbiornik

Elementy ściskane są to ustroje prętowe, w których siły podłużne N wywołują wytężenia ściskające w ich przekrojach. W zależności od rodzaju układu konstrukcyjnego, którego częścią jest pręt ściskany, lub w zależności od sposobu przekazywania obciążenia na pręt, elementy te są ściskane osiowo lub mimośrodowo.

Element ściskany osiowo, to taki pręt, w którym wypadkowa sił ściskających N działa w jego osi podłużnej. Jeżeli występuje mimośród obciążenia e w stosunku do osi pręta, to oprócz siły osiowej N działa moment zginający M = Ne. Taki element (rys. 2 – słup w osi C) traktuje się jako ściskany mimośrodowo (ściskany i zginany). Zginanie pręta ściskanego może być wywołane obciążeniem poprzecznym (q, P, M), przyłożonym prostopadle do jego osi podłużnej. W przykładzie ramy pokazanej na rys. 2 słup w osi B jest ściskany osiowo, słupy zewnętrzne zaś ściskane i zginane (lewy w wyniku działania obciążenia poprzecznego w, prawy w następstwie przekazania obciążenia poziomego z rygla).



Rys. 2. Przykłady słupów ściskanych osiowo i mimośrodowo

Idealnie osiowo ściskane pręty występują rzadko. Nominalnie ściskane osiowo pręty rzeczywiste są obarczone wstępnymi imperfekcjami (niedoskonałościami początkowymi o charakterze geometrycznym, technologicznym, konstrukcyjnym), które powodują ich zginanie. Jednak w przypadku pomijalnych mimośrodów i wstępnych imperfekcji możliwe jest wyodrębnienie klasy problemów (mających podstawowe znaczenie przy ocenie bezpieczeństwa słupów), umożliwiających przyjęcie w analizie modelu pręta ściskanego osiowo. W projektowaniu takich elementów stosuje się zasady i zalecenia odnoszące się do słupów. Jeżeli chodzi o zagadnienia nośności prętów ściskanych mimośrodowo, to ich modele obliczeniowe są utożsamione z modelami prętów ściskanych i zginanych. W ich kształtowaniu należy posługiwać się zaleceniami dotyczącymi zarówno słupów jak i belek.

Słupy są elementami ustawionymi zwykle pionowo. Gdy stalowy pręt ściskany nie jest ustawiony pionowo, a jego rzut przekracza 6 m, to należy uwzględnić w obliczeniach zginanie spowodowane jego ciężarem własnym.

Na rys. 3 pokazano przykłady konstrukcji elementów ściskanych. W słupie podpierającym strop stalowy (rys. 3a) można wyróżnić trzon 1, głowicę 2 i podstawę 3. Zadaniem głowicy 2 jest przyjęcie obciążenia i przekazanie go na trzon 1. Podstawowy element nośny trzon słupa 1, przenosi obciążenie z głowicy 2 na podstawę 3, która je przekazuje na fundamenty 4. Trzon 1 słupa szkieletu nośnego budynku (rys. 3b) przejmuje obciążenia z rygli stropowych kolejnych kondygnacji. W tym przypadku trzon słupa 1 na swojej długości jest wyposażony w odpowiednie elementy konstrukcyjne 5, umożliwiające połączenie go z ryglami (belkami). Z kolei pręty 6 (słupki, krzyżulce, pasy górne i dolne kratownicy – rys. 3b), przekazują wzajemnie obciążenia za pośrednictwem węzłów 7.

Pręty ściskane i trzony słupów projektuje się z jednego lub wielu kształtowników i są to odpowiednio elementy jedno lub wielogałęziowe (patrz szczegóły na rys. 3).



Rys. 3. Konstrukcje elementów ściskanych: 1 – głowica słupa, 2 – trzon słupa, 3 – podstawa słupa, 4 – fundament, 5 – połączenie rygla, 6 – pręt kratownicy, 7 – węzeł

2. Wybrane zagadnienia stateczności prętów ściskanych

Analizując nośność prętów ściskanych należy uwzględnić ich stateczność. W pręcie ściskanym możliwa jest utrata stateczności ogólnej (odnosząca się do całego elementu) oraz utrata stateczności lokalnej, która dotyczy ścianki kształtownika.

Utratę stateczności ogólnej pręta ściskanego nazywa się wyboczeniem. Objawiać się ona może wygięciem, wygięciem i skręceniem lub skręceniem osi podłużnej (rys. 4a).

Utrata stateczności lokalnej polega na miejscowym wybrzuszeniu ścianek pręta (w których powstają naprzemienne wypukłości i wklęśnięcia). W tym przypadku deformacji ulega tylko płaszczyzna główna ścianki, a oś podłużna pręta pozostaje prosta (rys. 4b). Obciążenie przy którym dochodzi do utraty stateczności (ogólnej lub miejscowej) nazywa się krytycznym (lub nośnością krytyczną N_{cr}). Nośności krytyczne wyboczenia N_{cr} elementów o najczęściej występujących smukłościach są mniejsze od nośności plastycznych ich przekrojów N_{pl} .



Rys. 4. Niestateczność prętów ściskanych: a – wyboczenie ogólne, b – postacie wyboczenia ogólnego, c – wyboczenie miejscowe ścianek, d – postacie wyboczenia miejscowego

Utrata stateczności ogólnej dotyczy prętów o przekrojach wszystkich klas. W przypadku analizy utraty stateczności ogólnej zmniejszenie nośności plastycznej przekroju ściskanego N_{pl} , wywołanego wyboczeniem uwzględnia się stosując współczynnik wyboczeniowy χ .

Utrata stateczności lokalnej występuje w prętach o przekrojach klasy 4. Skutki występowania miejscowego wyboczenia pręta uwzględnia się ustalając efektywne szerokości ścianek b_{eff} oraz efektywne charakterystyki geometryczne przekroju A_{eff} , I_{eff} , W_{eff} , i_{eff} . W obszarze smukłości prętów o przekrojach klasy 4, gdy naprężenia wyboczenia miejscowego i wyboczenia ogólnego przybierają bliskie sobie wartości, skutki występowania obu postaci niestateczności nakładają się wzajemnie na siebie, prowadząc do dalszego obniżenia nośności pręta. Dlatego wówczas w analizie nośności takich prętów uwzględnia się łącznie współczynnik wyboczeniowy χ i parametry efektywne (współpracujące) przekroju A_{eff} , I_{eff} , W_{eff} , i_{eff} .



Rys. 5. Schematy postaci wyboczeniowych pręta ściskanego

Postacie wyboczenia ogólnego prętów ściskanych przedstawiono na rys. 5. Ściskany pręt może się wyboczyć:

• giętnie (w płaszczyźnie *zx* lub płaszczyźnie *yz*), wtedy prosta oś podłużna ulega jedynie wygięciu w jednej z płaszczyzn głównych (na rys. 5 postacie I i II),

- skrętnie, gdy pierwotna oś podłużna pozostaje prosta, lecz przekrój obraca się i następuje jedynie jego skręcenie (na rys. 5 postać III),
- giętno-skrętnie, gdy pierwotna oś podłużna wygina się przestrzennie z równoczesnym obrotem (skręceniem) przekroju względem środka ścinania, co prowadzi do przestrzennego zakrzywienia osi (na rys. 5 postać IV).

Na wyboczenie skrętne narażone są pręty o przekrojach: otwartych monosymetrycznych, punktowo symetrycznych (np. krzyżowych) lub niesymetrycznych. Można nie sprawdzać skrętnej i giętno-skrętnej formy wyboczenia dla prętów z kształtowników walcowanych.

Zagadnienia wyboczenia ogólnego prętów ściskanych są rozwiązywane zgodnie z teorią prętów cienkościennych, o przekroju otwartym lub zamkniętym w sprężystym zakresie zachowania się materiału. W tym modelu obliczeniowym nazywanym eulerowskim, zakłada się, iż pręt jest idealnie prosty (brak wstępnych wygięć osi podłużnej), obciążenie jest przyłożone w osi podłużnej (brak mimośrodów przekazania obciążenia) i nie występują inne imperfekcje (niedoskonałości początkowe np. technologiczne) zmniejszające jego nośność na ściskanie. W ogólnym przypadku wytężenia takiego pręta ściskanego zagadnienie sprowadza się do rozwiązania układu trzech sprzężonych równań stateczności, z którego wyznacza się trzy wartości własne nośności giętno-skrętnego wyboczenia $N_{cr,1}$, $N_{cr,2}$, $N_{cr,3}$. Miarodajną w analizie bezpieczeństwa pręta ściskanego jest nośność min $(N_{cr,1}, N_{cr,2}, N_{cr,3})$. Układ sprzężonych równań ulega separacji, dla prętów o przekrojach bisymetrycznych i otrzymuje się wówczas trzy nośności krytyczne (tzw. eulerowskie): $N_{cr,y}$ – wyboczenia giętnego względem osi z-z i $N_{cr,x}$ – wyboczenia skrętnego.

Siły krytyczne (eulerowskie) prętów prostych o stałym przekroju otwartym wyznacza się według wzorów:

• przy wyboczeniu giętnym

$$N_{cr} = N_{cr,y} = \frac{\pi^2 E I_y}{(k_{by} L_y)^2},$$
(1)

lub

$$N_{cr} = N_{cr,z} = \frac{\pi^2 E I_z}{\left(k_{bz} L_z\right)^2},$$
(2)

• przy wyboczeniu skrętnym (oś z-z jest osią symetrii)

$$N_{cr} = N_{cr,T} = \frac{1}{i_s^2} \left[\frac{\pi^2 E I_{\omega}}{(k_w L_w)^2} + G I_T \right],$$
(3)

przy wyboczeniu giętno-skrętnym prętów o przekroju monosymetrycznym (oś y-y jest osią symetrii)

$$N_{cr} = N_{cr,TF} = \frac{(N_{cr,T} + N_{cr,y}) - \sqrt{(N_{cr,T} + N_{cr,y})^2 - 4N_{cr,T} N_y (1 - k_b z_s^2 / i_s^2)}}{2(1 - k_b z_s^2 / i_s^2)},$$
(4)

gdzie:

- L_y , L_z teoretyczna rozpiętość elementu miedzy punktami podparcia odpowiednio względem osi y-y oraz z-z,
 - L_w odległość przekrojów o swobodnym spaczeniu (przy podparciu widełkowym $L_w = L$),
- k_{by} , k_{bz} współczynnik długości wyboczeniowej przy wyboczeniu giętnym w płaszczyznach prostopadłych do osi głównych środkowych *y*-*y* lub *z*-*z*,
 - k_w współczynnik długości wyboczeniowej przy wyboczeniu skrętnym:

 $k_w = L_w / L$, gdzie L_w – odległość przekrojów o swobodnym spaczeniu,

 I_y , I_z – moment bezwładności względem osi odpowiednio y-y oraz z-z,

- I_T moment bezwładności przy skręcaniu swobodnym,
- I_{ω} wycinkowy moment bezwładności przy skręcaniu skrępowanym,
- z_{s} współrzędna środka ścinania względem środka ciężkości,

 $i_{\rm s}$ – biegunowy promień bezwładności względem środka ścinania

$$i_s = \sqrt{i_p^2 + z_s^2} , \qquad (5)$$

 $i_p\,$ – biegunowy promień bezwładności względem środka ciężkości,

$$i_p = \sqrt{i_y^2 + i_z^2}$$
, (6)

 $i_{\rm y}$, $i_{\rm z}$ – promienie bezwładności przekroju względem osi głównych, centralnych.

3. Długości wyboczeniowe i smukłości prętów ściskanych

W najczęściej występującym przypadku wyboczenia giętnego, obciążenie krytyczne pręta ściskanego (1), (2) po przekształceniu opisuje zależność

$$N_{cr,i} = \pi^2 A \frac{E}{\lambda_i^2},\tag{7}$$

gdzie:

A – pole przekroju pręta ściskanego,

 λ_i – smukłość pręta

$$\lambda_i = \frac{L_{cr,i}}{i_i}, \qquad (8)$$

w którym:

 i_i – promień bezwładności przekroju.

 $L_{cr,i}$ – długość wyboczeniowa pręta ściskanego

$$L_{cr,i} = k_i L_i, \tag{9}$$

przy czym

L_i – teoretyczna rozpiętość elementu miedzy punktami podparcia,

 k_i – współczynnik długości wyboczeniowej pręta.

Z analizy wzoru (7) wynika, że nośność krytyczna pręta zależy przede wszystkim od smukłości elementu ściskanego (8). Smukłość pręta (8) jest podstawowym parametrem określającym odporność (sztywność) elementu ściskanego na wyboczenie. Uwzględnia ona wpływ długości elementu między punktami podparcia L_i , sposobu zamocowania pręta na jego końcach k oraz jego charakterystyk geometrycznych przekroju, na nośność przy ściskaniu. Nośność krytyczna pręta N_{cr} jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu jego smukłości λ , przy czym element wyboczy się wg postaci, którą opisuje największa smukłość λ_{max} . Dlatego należy pamiętać, że do obliczania nośności pręta ściskanego przyjmuje się największą smukłość spośród λ_y , λ_z , λ_η , λ_ζ oraz λ_ω (x, y, η , ζ – osie przekroju poprzecznego pręta), gdyż wyboczenie pręta nastąpi wg postaci, której odpowiada największa smukłość pręta (8). Z kolei smukłość pręta jest wprost proporcjonalna do długości wyboczeniowej elementu ściskanego $L_{cr,i}$ (9). Długość wyboczeniowa pręta $L_{cr,i}$ jest odległością pomiędzy węzłami postaci wyboczeniowej. Jest ona iloczynem długości pręta między punktami podparcia L_i i współczynnika długość wyboczeniowej pręta k_i , który jest funkcją podatności na obrót i przemieszczenie końców analizowanego pręta (zależy od jego schematu statycznego).

Na rys. 6 pokazano przykładowe schematy statyczne prętów ściskanych ("wyizolowanych" z ustroju nośnego) oraz podano ich współczynniki długości wyboczeniowej k_i (oznaczanych w literaturze przedmiotu również jako μ).



Rys. 6. Długości wyboczeniowe prętów ściskanych

Pokazane na rys. 6 schematy dotyczą pojedynczych prętów ściskanych. W konstrukcjach rzeczywistych mamy do czynienia ze schematami bardziej złożonymi (ramami, kratownicami itp.) i długości wyboczeniowe prętów ściskanych należy wyznaczać analizując stateczność układu. Niektóre zalecenia dotyczące przyjmowania długości wyboczeniowych prętów ściskanych w prostych systemach konstrukcyjnych, które uwzględniają doświadczenia technologiczne i konstrukcyjne podaje PN-EN 1993-1-1 oraz literatura przedmiotu.

W szacowaniu nośności prętów ściskanych bardzo ważną sprawą jest poprawna identyfikacja sposobu zamocowania końców pręta i właściwe określenie jego długości wyboczeniowych oraz smukłości. Przyjęty model obliczeniowy (schemat statyczny) pręta musi mieć pełne odzwierciedlenie w rozwiązaniu konstrukcyjnym połączeń jego końców (przegub, utwierdzenie, zamocowanie sprężyste o podatności na obrót, możliwość przesuwu węzła). Stąd też konstruując wcześniej obliczony obiekt należy pamiętać o przyjętych (założonych) warunkach brzegowych projektowanych elementów. Identyfikując schemat statyczny elementu należy zwrócić uwagę na możliwość przemieszczania się i obrotów jego końców, postaci i długości wyboczeniowych w płaszczyźnie i z płaszczyzny ustroju. W poprawnym przyjęciu schematu statycznego zamocowania słupów istotną jest analiza nośności ich połączeń z fundamentem i ryglem $M_{y,Rd}$, $M_{z,Rd}$, $V_{y,Rd}$, $V_{z,Rd}$.

Podsumowując należy stwierdzić, że ważnym zagadnieniem w poprawnym ustalaniu długości wyboczeniowych prętów ściskanych jest uwzględnienie rzeczywistych warunków zamocowania pręta oraz różnych długości pomiędzy więzami ograniczającymi wyboczenie pręta w kierunkach do siebie prostopadłych. Należy badać postaci wyboczeniowe analizowanej konstrukcji z uwzględnieniem rozwiązań konstrukcyjnych nie tylko w płaszczyźnie analizowanych układów, ale i w kierunku prostopadłym.

W określeniu smukłości prętów ściskanych λ_i w pierwszej kolejności należy ustalić długość teoretyczną L_i postaci utraty stateczności w analizowanej płaszczyźnie.

W konstrukcji pokazanej na rys. 7 połączenie słupa z fundamentem w płaszczyźnie ramy ma schemat sztywnego zamocowania, w analizie zaś wyboczenia słupa w płaszczyźnie ściany podłużnej hali przyjmuje się połączenie przegubowe. Węzeł dolny słupa w obu kierunkach traktuje się jako nieprzesuwny.

Przyjęte schematy połączeń z fundamentem mają ścisły związek z zastosowanym rozwiązaniem konstrukcyjnym podstawy słupa i rozmieszczenia śrub kotwiących (patrz szczegół "A" na rys. 7). W analizowanym na rys. 7 przypadku założono, że w płaszczyźnie układu poprzecznego połączenie słupa z fundamentem przenosi moment zginający, w kierunku prostopadłym zaś możliwy jest swobodny obrót.

Z kolei w płaszczyźnie ramy słup z ryglem może być połączony w sposób sztywny lub przegubowy, lecz węzeł ten ma swobodę przemieszczeń poziomych. W płaszczyźnie prostopadłej do układu poprzecznego, połączenie głowicy słupa z belką okapową umożliwia obrót i odpowiada schematowi przegubowemu, bez możliwości przemieszczeń poziomych tego węzła. Ograniczenie przemieszczeń głowic słupów zapewniają w tym przypadku stężenia pionowe w płaszczyźnie ścian podłużnych. W omawianym przykładzie współczynnik długości wyboczeniowej słupa w płaszczyźnie ramy k_y jest różny od współczynnika długości wyboczeniowej w płaszczyźnie ściany k_z , $(k_y \neq k_z)$.

W konstrukcji na rys. 7a teoretyczne długości słupa w obu płaszczyznach są takie same $L_y = L_z = h$. W przykładzie na rys. 7b długość teoretyczna słupa w płaszczyźnie ściany



Rys. 7. Schemat konstrukcji ramy portalowej ze słupami o różnych postaciach i długościach wyboczeniowych w płaszczyźnie i z płaszczyzny ustroju

podłużnej jest dwukrotnie mniejsza $L_z = 0,5h$ od tejże w płaszczyźnie układu poprzecznego $L_y = h$. Wynika to z konstrukcji zastosowanego stężenia pionowego podłużnego słupów i dlatego $L_y \neq L_z$.

W przypadku analizy giętnych postaci utraty stateczności pręta bisymetrycznego należy rozpatrzyć następujące smukłości

$$\lambda_y = \frac{k_y L_y}{i_y},\tag{10}$$

$$\lambda_z = \frac{k_z L_z}{i_z} \,. \tag{11}$$

Oprócz analizy giętnej postaci wyboczenia, należy badać możliwość wystąpienia giętnoskrętnej postaci utraty stateczności elementów ściskanych. Wskazówki i propozycje obliczeniowe takiej formy wyczerpania nośności są podane w literaturze przedmiotu.

Rekapitulując omawianie problemu identyfikacji schematów statycznych prętów ściskanych należy podkreślić konieczność przyjmowania możliwie precyzyjnego i adekwatnego modelu teoretycznego, opisującego warunki fizyczne ich zamocowania na końcach według kryterium szacowania nośności krytycznej od dołu.

Cechą charakterystyczną słupów, jako elementów składowych układów poprzecznych hal lub szkieletów nośnych budynków jest przesuwność ich węzłów w płaszczyźnie ramy. Słupy ram o węzłach przesuwnych mają większe wartości współczynników długości wyboczeniowych od ustrojów o węzłach nieprzesuwnych. Ponadto w analizie stateczności tych konstrukcji słupów nie można traktować jak pojedynczych prętów, lecz jako elementy składowe ram.

W układach słupowo-ryglowych (rys. 8b, 9b) na wartość współczynnika długości wyboczeniowej słupa k w płaszczyźnie ramy mają wpływ długości h_s , l_b oraz sztywności I_s , I_b słupów (s) i rygli (b), z którymi jest on sztywno połączony w węźle górnym (2) i dolnym (1). Współczynnik długości wyboczeniowej k słupa określa się korzystając z nomogramów dla układów ramowych o węzłach nieprzesuwnych (rys. 8a) i przesuwnych (9a).

Współczynnik długości wyboczeniowej słupa k jest funkcją sztywności jego zamocowania na końcach tzw. współczynników rozdziału C_1 i C_2 . Wyznacza się go ze wzoru:

$$k = k(C_1, C_2). (12)$$

Współczynniki rozdział
u $C_i \ (i=1, \, 2-$ numery węzłów górnego i dolnego) wyznacza się ze wzoru

$$C_{i} = \frac{K_{c}}{K_{c} + K_{o,i}} \ge 0,3,$$
(13)

w którym K_c – sztywność analizowanego słupa i $K_{o,i}$ – sztywność zamocowania słupa w węźle, które wynoszą

$$K_c = \frac{I_s}{h_s},\tag{14}$$

$$K_{o,i} = \sum_{j} \eta_{ij} \frac{I_{b,ij}}{l_{b,ij}},\tag{15}$$

gdzie:

 $I_{s},\,h_{s}$ – moment bezwładności przekroju oraz wysokość słupa,

- $I_{b,ij}$, $l_{b,ij}$ moment bezwładności oraz długość *j*-tego elementu (belki, słupa) zbiegającego się w *i*-tym węźle, który jest połączony w sposób sztywny z analizowanym prętem (Σ – sumowanie obejmuje tylko pręty leżące w płaszczyźnie wyboczenia i sztywno połączone w analizowanym węźle),
 - η_{ij} współczynnik uwzględniający warunki podparcia *j*-tego elementu w *i*-tym węźle, na drugim jego końcu, który należy przyjmować:
- w przypadku układu (ramy) o węzłach nieprzesuwnych

 $\eta = 1,5$ dla podparcia przegubowego,

 $\eta = 2,0$ dla sztywnego utwierdzenia,

• w przypadku układu (ramy) o węzłach przesuwnych

 $\eta = 0,5$ dla podparcia przegubowego,

 $\eta = 1,0$ dla sztywnego utwierdzenia.

Dla słupa sztywno utwierdzonego w fundamencie należy przyjąć $K_o = K_c$, w pozostałych przypadkach $K_o = 0.1 K_c$.

Zamiast odczytywać wartość współczynnika wyboczeniowego z rys. 8 i 9 można obliczyć ich wartość ze wzorów:

• układów nieprzechyłowych (wg rys. 8b)

$$k = 0.5 + 0.14(C_1 + C_2) + 0.55(C_1 + C_2)^2,$$
(16)

lub

$$k = \frac{1+0.145(C_1+C_2)-0.265C_1C_2}{2-0.364(C_1+C_2)-0.247C_1C_2},$$
(17)

• układów przechyłowych (wg rys. 9b)

$$k = \frac{1 - 0.2(C_1 + C_2) - 0.12C_1C_2}{1 - 0.8(C_1 + C_2) + 0.6C_1C_2}.$$
(18)



Rys. 8. Nomogramy do wyznaczania współczynnika długości wyboczeniowej prętów w układach o węzłach nieprzesuwnych (nieprzechyłowych)

Podane w normach projektowania konstrukcji stalowych zalecenia wyznaczania długości wyboczeniowych słupów nie wyczerpują wszystkich sytuacji projektowych, a wiele wskazówek w tej dziedzinie można znaleźć w literaturze dotyczącej stateczności układów prętowych. W złożonych układach konstrukcyjnych, szczególnie, gdy uwzględnia się podatność węzłów, należy korzystać z programów numerycznych analizujących stateczność ustroju prętowego.



Rys. 9. Nomogramy do wyznaczania współczynnika długości wyboczeniowej prętów w układach o węzłach przesuwnych (przechyłowych)

Ważkość zagadnienia właściwego szacowania nośności krytycznej ustrojów analizowane będzie na przykładzie ramy jednokomorowej pokazanej na rys. 10. Składa się ona ze słupa utwierdzonego w fundamencie i słupa (lewego) o schemacie wahacza (prawego), które są połączone przegubowo z ryglem poziomym. Słupy są obciążone siłami pionowymi N. W ramie tej występują dwa schematy słupów: utwierdzony (typu wspornikowego) oraz przegubowoprzegubowy. W badanej ramie, przyjęcie długości wyboczeniowych k = 2,0 jak dla słupa utwierdzonego (rys. 2b) jest błędne. Z analizy stateczności ramy wynika, iż dla słupa lewego (utwierdzonego sztywno w fundamencie) należy przyjmować k = 2,7 [1]. Na taką długość wyboczeniową ma wpływ oddziaływanie w chwili wyboczenia składowej poziomej H_0 od obciążenia przechylonego słupa prawego, a w analizie stateczności należy uwzględnić, iż jest to układ o przesuwnych węzłach górnych. Należy zaznaczyć, iż w badanym przypadku przyjęcie k = 2,0 prowadzi do zawyżenia oszacowania obciążenia krytycznego o 82%.



Rys. 7.10. Schemat ramy portalowej

4. Pręty jednogałęziowe ściskane osiowo

Obciążenia krytyczne określone wzorami (1)÷(4) zostały wyznaczone z rozwiązania równań stateczności i dotyczą eulerowskiego modelu ściskanego osiowo pręta idealnego.

Pręt idealny to taki, który nie ma początkowych niedoskonałości geometrycznych (np. wygięć i skręcenia osi podłużnej), technologicznych (np. wstępnych naprężeń: walcowniczych, strukturalnych, spawalniczych, odchyłek wytwórczych, transportowych i montażowych) oraz konstrukcyjnych (np. losowych mimośrodów przyłożenia obciążeń), czyli tzw. wstępnych imperfekcji.

Schemat pręta idealnego, osiowo obciążonego siłą ściskającą N pokazano na rys. 11a.

W ocenie nośności rzeczywistych prętów ściskanych ich losowe niedoskonałości aproksymuje się rozpatrując model elementu z zastępczą imperfekcji geometryczną (rys. 11b).



Rys. 11. Schemat ściskanego pręta: idealnego obciążonego osiowo (a) i rzeczywistego obciążonego mimośrodowo (b)

Fizyczna interpretacja zachowania się takiego pręta idealnego (rys. 11a) zakłada, że przy wzroście obciążenia ściskającego *N* do chwili wyboczenia pręt jest prosty i ulega jedynie skróceniu. Gdy obciążenie osiąga nośność krytyczną ściskanego elementu, następuje bifurkacja, tj. zmiana postaci równowagi - pręt nagle wygina się (rys. 12). W przypadku ściskania pręta wykonanego z materiału sprężystego, wytężonego w sprężystym zakresie, po zmniejszeniu obciążeń pręt winien wrócić do postaci wyjściowej tj. powinien być prosty. Ścieżkę równowagi ściskanego pręta idealnego pokazano na rys. 12.



Rys. 12. Ścieżki równowagi ściskanych pręta idealnego oraz rzeczywistego

Nośność rzeczywistych prętów ściskanych jest zagadnieniem znacznie bardziej złożonym niż przedstawiony model eulerowski. W modelu obliczeniowym szacowania nośności pręta ściskanego należy uwzględnić wyboczenie w zakresie sprężysto-plastycznym, imperfekcje

konstrukcyjne, geometryczne i technologiczne, a eulerowskie obciążenie krytyczne dotyczy pręta idealnego i stanowi oszacowanie osiowej nośności granicznej od góry.

Eulerowski model teoretyczny wytężenia pręta ściskanego nie znajduje pełnego potwierdzenia w badaniach, a rzeczywiste pręty ściskane osiągają nośność graniczną N_{gr} , która jest mniejsza od oszacowania teoretycznego N_{cr} (rys. 12). Rzeczywiste pręty ściskane (słupy, zastrzały, pręty kratownic itp.) nie spełniają wszystkich poczynionych wcześniej, założeń o pręcie idealnym. Jako zasadniczą przyczynę występowania różnic pomiędzy założonym obliczeniowym modelem teoretycznym pręta idealnego jest występowanie imperfekcji wstępnych (tzw. czynnika giętnego). Na zginanie ściskanego pręta mają wpływ następujące czynniki:

- losowe imperfekcje geometryczne (wygięcia z_0) osi pręta,
- losowe przyłożenie obciążenia ściskającego (wstępny mimośród e),
- występowanie obciążeń poprzecznych o charakterze losowym lub stałym (np. ciężar własny ściskanego pasa górnego kratownicy dachowej),
- losowa geometria przekroju poprzecznego pręta,
- wpływ naprężeń spawalniczych,
- losowe właściwości mechaniczne materiału,
- losowe odchyłki technologiczne (np. niedokładności połączeń montażowych).

Wymienione imperfekcje sprawiają, że rzeczywiste pręty są nie tylko ściskane, ale i zginane (występuje zginanie II rzędu). Schemat obliczeniowy rzeczywistego pręta ściskanego pokazano na rys. 11b. Czynnik zginający znacznie zmniejsza nośność pręta ściskanego. Stąd też pręty ściskane charakteryzuje duża wrażliwość na imperfekcje. Osiowa nośność takiego pręta jest określona jako nośność graniczna N_{gr} , która jest mniejsza od teoretycznego oszacowania tj. nośności krytycznej N_{cr} . Różnica między N_{cr} i N_{gr} wzrasta nieliniowo ze wzrostem imperfekcji osi podłużnej i mimośrodu przyłożenia obciążenia, co pokazano na rys. 13 i 14.

Na rys. 13a pokazano krzywą równowagi granicznej pręta ściskanego siłą N na mimośrodzie e, na rys. 13b pokazano zaś krzywą równowagi granicznej pręta wstępnie wygiętego o z_0 , ściskanego siłą N przyłożoną osiowo. Ich ścieżki równowagi, granicznej (rys. 13) mają ten sam kształt (są krzywoliniowe) i podobne właściwości. W obu przypadkach ściskane pręty są nie tylko obciążone osiowo, ale i gięte (zginanie II rzędu), a ich ścieżki równowagi statycznej są funkcjami nieliniowymi. Ponadto ich obciążenie graniczne N_{gr} jest mniejsze od nośności krytycznej N_{cr} . Różnice miedzy N_{gr} i N_{cr} wzrastają nieliniowo ze wzrostem imperfekcji osi podłużnej prętów oraz mimośrodów przyłożenia obciążenia ściskającego.



Rys.13. Ścieżki równowagi statycznej prętów ściskanych mimośrodowo (a) oraz ze wstępną krzywizną (b)

Na rys. 14 pokazano zmniejszanie się nośności granicznej prętów ściskanych w miarę zwiększania wstępnych imperfekcji geometrycznych. Pręty o dużej smukłości są bardziej niż pręty krępe wrażliwe na oddziaływanie wstępnych imperfekcji geometrycznych. Wpływ imperfekcji geometrycznych na zmniejszenie nośności (z N_{cr} na N_{gr}) jest większy dla prętów smukłych niż w przypadku prętów krępych, jak to pokazano na rys. 14b.



Rys. 14. Ścieżki równowagi statycznej prętów ściskanych o różnych imperfekcjach geometrycznych (a) oraz o różnych smukłościach (b)

W analizie ścieżki równowagi statycznej pręta ściskanego należy zwrócić również uwagę na fakt, iż obciążony pręt ściskany po osiągnięciu nośności granicznej N_{gr} traci nośność (następuje cofanie się nośności). Porównując modele wyczerpania nośności pręta wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego, zginanego zabezpieczonego przed zwichrzeniem i pręta ściskanego należy stwierdzić, iż zginany pręt o przekroju grubościennym (klasy 1) zachowuje swą nośność (zdolność do przenoszenia obciążeń), ściskany pręt zaś, na wskutek gwałtownego przyrostu przemieszczeń poprzecznych traci nośność w granicznym stanie obciążenia (porównaj z ścieżką równowagi granicznej pręta zginanego).

Uwzględnienie zginania w modelu matematycznym opisującym wytężenie rzeczywistego pręta ściskanego umożliwia precyzyjniejszą analizę jego wytężenia. Schemat takiego pręta jednocześnie zginanego i ściskanego pokazano na rys. 11b. W sytuacji jednoczesnego ściskania i zginania w ocenie mamy do czynienia z równaniem różniczkowym czwartego rządu, o nieliniowo zmieniających się współczynnikach. Jako rozwiązanie takiego równania otrzymuje się przemieszczenia $z^{II} = z(N)$ stanowiące podstawę do wyznaczenia momentów zginających $M^{II} = M(N)$, sił poprzeczne $V^{II} = V(N)$, które są funkcją obciążenia ściskającego N. Są to wielkości wyznaczone wg teorii II rzędu. Przedstawiony model matematyczny uwzględniający obciążenie pręta imperfekcjami stanowi precyzyjniejszy opis wytężenia rzeczywistych elementów ściskanych. Równocześnie należy zaznaczyć, że analizowany przypadek wytężenia pręta ściskanego nie może być traktowany jako suma wytężenia pręta ściskanego i wytężenia pręta zginanego, gdyż prowadzi to do błędnych wyników, a zadanie takie należy rozwiązywać według teorii II rzędu.



Rys. 15. Schematy prętów ściskanych i zginanych

Zagadnienie zginania II rzędu będzie analizowane na przykładzie słupa utwierdzonego, obciążonego siłą ściskającą N oraz jednym z czynników giętnych, którymi mogą być: mimo-

śród *e* (rys.15a) przyłożenia siły ściskającej *N*, wstępnie wygięta oś pręta z_0 (15b), czy obciążenie poprzeczne *q* przyłożone prostopadle do osi pręta (rys. 15c). Takie pręty obciążone gietnie doznają przemieszczeń poprzecznych z_1 , które można wyznaczyć wg teorii I rzędu. Przyłożenie obciążeń podłużnych *N* do wygiętego o z_1 pręta powoduje zwiększenie (amplifikację) momentu zginającego oraz przemieszczeń pręta ściskanego. Zwiększone przemieszczenia takiego pręta powodują dodatkowy przyrost zarówno sił wewnętrznych jak i przemieszczeń. Tak wykonywane przyrostowe procedury obliczeniowe należy prowadzić, aż kolejny przyrost wielkości statycznych będzie pomijalnie mały. Momenty zginające M^{II} oraz przemieszczenia pręta z^{II} , wyznaczone z uwzględnieniem przemieszczeń są funkcją obciążenia ściskającego *N*. Opisane zjawisko tłumaczy fizykę nieliniowego charakteru krzywych równowagi statycznej prętów ściskanych i zginanych, gdyż liniowemu wzrostowi obciążeń ściskających *N* towarzyszą nieliniowe przyrosty momentów zginających, sił poprzecznych i przemieszczeń ustroju. Siły wewnętrzne i przemieszczenia prętów ściskanych i zginanych można wyznaczyć ze wzorów

$$M^{\rm II} = M^{\rm I}a \,, \tag{19}$$

$$V^{\rm II} = V^{\rm I} a \,, \tag{20}$$

$$z^{\mathrm{II}} = z^{\mathrm{I}}a \,, \tag{21}$$

gdzie a – współczynnik amplifikacji (powiększenia)

$$a = \frac{1}{1 - \frac{N}{N_{cr}}},\tag{22}$$

w których

M^I, V^I, z^I – siły wewnętrzne i przemieszczenie wyznaczone wg teorii I rzędu (bez uwzględnienia wpływu przemieszczeń na siły wewnętrzne i ugięcia),
 N_{cr} – eulerowskie obciążenie krytyczne (1)÷(4).

W przypadku pręta ściskanego ze wstępną imperfekcją z_0 amplifikacyjny przyrost przemieszczeń z^{II} wyznacza się ze wzoru (21), przyjmując $z^{I} = z_0$. Na rys. 16 pokazano wykres współczynnika amplifikacji a (21) w funkcji N/N_{cr} . Analiza tego wykresu dobrze tłumaczy nieliniowość sił wewnętrznych oraz ugięć wyznaczonych wg teorii II rządu.



Rys. 16. Wykres współczynnika amplifikacji

Model zniszczenia ściskanych prętów oraz ich zachowanie się w stanach granicznych różnią się zasadniczo od mechanizmu zniszczenia i formy wyczerpania nośności prętów rozciąganych lub zginanych. Na rys. 17 pokazano ścieżkę równowagi statycznej pręta obciążonego osiowo siłą podłużną.



Rys. 17. Ścieżka równowagi statycznej pręta ściskanego i rozciąganego

Ścieżka równowagi statycznej pręta rozciąganego jest liniową funkcją rosnącą, aż do osiągnięcia nośności plastycznej N_{pl} . Pręty rozciągane ze stali sprężysto-plastycznych, oprócz fazy plastycznej nośności mają zapas nośności Z_1^+ (faza wzmocnienia materiału). Ścieżka równowagi statycznej pręta ściskanego jest nieliniowa w zakresie sprężystym wytężenia materiału, a teoretyczne oszacowanie nośności krytycznej N_{cr} pręta idealnego jest większe od rzeczywistej nośności granicznej N_{gr} wyznaczonej wg modelu pręta obarczonego imperfekcjami (zmniejszenie nośności Z_2^-). Zachodzi więc nierówność

$$N_{gr} < N_{cr} < N_{pl}$$
. (23)

Należy ponadto zauważyć, że po osiągnięciu nośności granicznej N_{gr} ściskany pręt traci zdolność przenoszenia przyłożonych obciążeń. Wynika to z faktu, iż obciążenie (które ma charakter zachowawczy) działa na wzrastającym mimośrodzie, co w efekcie prowadzi do przyspieszonego, lawinowego wyczerpania nośności pręta.

Specyficzny charakter ścieżki równowagi statycznej prętów ściskanych znalazł odzwierciedlenie w normowych metodach wymiarowania tak obciążonych prętów (m.in. kalibrowaniu ich normowych krzywych wyboczeniowych). Mimo, iż ściskane nominalnie osiowo elementy rzeczywiste nie spełniają ściśle założeń eulerowskiego pręta idealnego, to ten model obliczeniowy jest stosowany w normach jako podstawa do szacowania ich nośności. Jest sprawą oczywistą, iż model eulerowski jest dla potrzeb normowych odpowiednio zmodyfikowany przez odpowiednie współczynniki.

5. Współczynnik wyboczeniowy

Zarówno obciążenie krytyczne N_{cr} jak i graniczne N_{gr} są mniejsze od nośności plastycznej przekroju pręta N_{gr} (23). W podejściu normowym do analizy bezpieczeństwa prętów ściskanych ich nośność z uwzględnieniem utraty stateczności ogólnej wyznacza się obliczając współczynnik wyboczeniowy χ . Jest on definiowany jako iloraz nośności granicznej pręta ściskanego osiowo N_{gr} i obliczeniowej nośności plastycznej przekroju N_{pl} :

$$\chi = \frac{N_{gr}}{N_{pl}},\tag{24}$$

Obliczeniową nośność plastyczną przekroju $N_{\it pl}\,$ ści
skanego osiowo wyznacza się ze wzoru

$$N_{pl} = N_{c,Rd} = \frac{Af_y}{\gamma_{M0}},$$
(25)

gdzie:

A – pole przekroju odpowiednio: brutto $A = A_{br}$ – dla przekrojów klasy 1, 2 i 3 oraz efektywne (współpracujące) $A = A_{eff}$ – w przypadku przekrojów klasy 4,

 f_y – granica plastyczności stali,

 γ_{M0} – częściowy współczynnik w ocenie nośności przekroju, γ_{M0} = 1,00.

Korzystając z (11) oraz (25) teoretyczny współczynnik wyboczeniowy, obliczony przy założeniu $N_{gr} = N_{cr}$, można zapisać w następującej postaci

$$\chi = \frac{N_{cr}}{N_{pl}} = \frac{\pi^2 \frac{E}{\lambda^2} A}{A f_y} = \frac{\pi^2 \frac{E}{f_y}}{\lambda^2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} = \frac{1}{\overline{\lambda}^2}, \qquad (26)$$

gdzie:

 λ_1 – smukłość porównawcza

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93.9 \sqrt{\frac{235}{f_y}},$$
 (27)

 $\overline{\lambda}$ – smukłość względna, którą oblicza się - dla przekroju klas 1, 2 i 3 ze wzoru

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \cdot \frac{1}{\lambda_1}, \qquad (28)$$

- dla przekroju klasy 4 ze wzoru

$$\overline{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{A_{eff} f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \cdot \frac{\sqrt{\frac{A_{eff}}{A}}}{\lambda_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \sqrt{\frac{A_{eff}}{A}}, \qquad (29)$$

w których λ jest smukłością rzeczywistą pręta w rozpatrywanej płaszczyźnie wyboczenia według (8).

Wzór (26) jest ważny w sprężystym zakresie wytężenia materiału, gdy obowiązuje prawo Hooke'a (E = const) i naprężenia we włóknach skrajnych w pręcie ściskanym nie przekraczają granicy proporcjonalności f_p (rys. 18a). W sprężystym zakresie wytężenia, gdy smukłość pręta λ jest większa od granicznej wyboczenia sprężystego λ_{el} (rys. 18b) naprężenia krytyczne opisuje hiperbola Eulera, która jest funkcją wklęsłą. Wartość λ_{el} rozgranicza wyboczenie sprężyste gdy $\lambda > \lambda_{el}$ od sprężysto-plastycznego gdy $0 < \lambda < \lambda_{el}$. Zagadnienie wyboczenia prętów ściskanych poza zakresem sprężystym (gdy $0 < \lambda < \lambda_{el}$) jest problemem złożonym m.in. ze względu na zmienność współczynnika sprężystości podłużnej E.



Rys. 18. Wykresy naprężeń: krytycznych pręta w funkcji smukłości (b) oraz $\sigma(\varepsilon)$ stali (a)

W przedziale smukłości elementu $0 < \lambda < \lambda_{el}$ wprowadza się krzywe aproksymacyjne rzeczywistą nośność pręta ściskanego, np. Tetmajere-Jasińskiego, Engesser-Karmana, Schanleya. Krzywe te są funkcjami wypukłymi.

Należy zauważyć, że granice proporcjonalności f_p i granica plastyczności f_y są inne dla różnych gatunków stali. Dlatego w zakresie wyboczenia sprężysto-plastycznego należałoby się posługiwać różnymi krzywymi wyboczeniowymi, które są zależne od gatunku stali. Wprowadzenie smukłości porównawczej λ_1 oraz bezwymiarowej smukłości względnej $\overline{\lambda}$ umożliwia posługiwanie się w analizach stateczności ściskanych prętów w zakresie sprężystoplastycznym jednolitą formułą niestateczności (jedną funkcją) dla różnych gatunków stali.

Podsumowując można stwierdzić, że w normowych modelach obliczania nośności prętów ściskanych wykorzystuje się wzory na eulerowskie obciążenia krytyczne, w których w zakre-

sie pozasprężystym uwzględnia się odmienną granicę plastyczności stali poszczególnych gatunków stali, a także bierze się pod uwagę ich wstępne losowe imperfekcje.

Obszerne badania doświadczalne ściskanych słupów wykonane na zlecenie Europejskiej Konwencji Konstrukcji Stalowych (ECCS) doprowadziły do uzgodnienia krzywych wyboczeniowych prętów rzeczywistych z ich modelem teoretycznym. Zaproponowane przez ECCS podejście pozwala na wierniejsze odwzorowanie wytężenia tak obciążonych elementów w zależności od kształtu przekroju poprzecznego, technologii jego wykonania oraz wpływu imperfekcji geometrycznych. W tym podejściu w zależności od stopnia wrażliwości na wstępne, losowe imperfekcje geometryczne i technologiczne dla ściskanych prętów proponuje się krzywe wyboczeniowe, które wyspecyfikowano rozpatrując model pręta ściskanego ze wstępną ekwiwalentną krzywizną. W PN-EN 1993-1-1 w specyfikowaniu krzywych wyboczeniowych: a_0 , a, b, c i d przyjęto zastępcze wstępne wygięcie w środku rozpiętości odpowiednio L/350, L/300, L/250, L/200, L/150, gdzie L - długość pręta.

Przez imperfekcje technologiczne rozumie się naprężenia wstępne, rozłożone nierównomiernie w obszarze przekroju poprzecznego elementów, a także na ich długości. Są to naprężenia normalne, zwykle działające wzdłuż osi pręta, które w przekroju poprzecznym tworzą układ zrównoważony, tak że ich wypadkowa równa się zeru. Przy dużych naprężeniach wstępnych oś podłużna pręta może ulec wyraźnemu zakrzywieniu. Powstanie naprężeń wstępnych (resztkowych, rezydualnych, pozostających) powoduje, że elementy konstrukcji jeszcze przed przyłożeniem obciążeń zewnętrznych mogą wykazywać, w licznych strefach przekrojów poprzecznych, naprężenia normalne o dużych wartościach, nawet osiągających granicy plastyczności materiału. Naprężenia te dodają się do naprężeń od przyłożonych obciążeń zewnętrznych i mogą spowodować wyczerpanie wytrzymałości materiału. W tym sensie występujące naprężenia wstępne są imperfekcją obniżającą nośność elementu. Szczególnie istotne są nierównomierne odkształcenia plastyczne podczas nagrzewania i stygnięcia elementu. Najważniejszymi procesami wytwórczymi, w których powstają naprężenia wstępne są walcowanie i spawanie. Pochodzenie tych naprężeń jest więc natury termicznej. Przyczyną powstawania naprężeń rezydualnych jest również prostowanie i gięcie.

Naprężenia rezydualne walcownicze powstają w końcowej fazie formowania kształtowników i blach na gorąco, a wielkości ich ustalają się podczas chłodzenia. Naprężenia rezydualne w blachach walcowanych na gorąco są nieduże (w osi podłużnej wynoszą około +30 MPa , a na brzegach dochodzą do -100 MPa). W kształtownikach naprężenia rezydualne własne są większe, a ich rozkład zależy od stosunku wymiarów przekroju poprzecznego. Intensywność naprężeń walcowniczych zależy od różnicy temperatur, jej rozkładu wzdłuż grubości ścianek, pojemności cieplnej elementu i szybkości studzenia. Drugim termicznym procesem, stosowanym powszechnie do łączenia części składowych konstrukcji stalowych jest spawanie. Naprężenia powstające w trakcie tego procesu nazywane są spawalniczymi.

W PN-EN 1993-1-1 przyjęto dla ściskanych prętów 5 krzywych wyboczeniowych: a₀, a, b, c i d w zależności od kształtu przekroju, wrażliwości na wstępne imperfekcje geometryczne, technologii wykonania - wpływu imperfekcji technologicznych (naprężeń spawalniczych) oraz gatunku stali. Są one odpowiednią modyfikacją teoretycznej krzywej wyboczeniowej (26), w której uwzględniono wyboczenie w zakresie sprężysto-plastycznym, a przede wszyst-kim wstępne imperfekcje. Krzywe wyboczeniowe wg PN-EN 1993-1-1 pokazano na rys. 19.



Rys. 19. Krzywe wyboczeniowe według PN-EN 1993-1-1

Współczynnik wyboczeniowy χ elementów ściskanych osiowo wyznacza się wg PN-EN 1993-1-1 w zależności od smukłości względnej $\overline{\lambda}$, parametru imperfekcji α oraz odpowiedniej krzywej wyboczenia opisanej funkcją:

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \overline{\lambda}^2}} \quad \text{lecz} \quad \chi \le 1,0 , \tag{30}$$

gdzie

$$\Phi = 0.5[1 + \alpha(\overline{\lambda} - 0.2) + \overline{\lambda}^2].$$
(31)

Smukłość względną przy wyboczeniu giętnym $\overline{\lambda}$ wyznacza się w zależności od klasy przekroju poprzecznego pręta:

• przekroje klasy 1, 2 i 3

$$\overline{\lambda} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1}, \qquad (32)$$

• przekroje klasy 4

$$\overline{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff} f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \frac{\sqrt{\frac{A_{eff}}{A}}}{\lambda_1} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \sqrt{\frac{A_{eff}}{A}}, \qquad (33)$$

w których:

 N_{cr} – siła krytyczna odpowiadająca miarodajnej postaci wyboczenia sprężystego, wyznaczona na podstawie cech przekroju brutto,

- $L_{cr}\,$ długość wyboczeniowa w rozpatrywanej płaszczyźnie wyboczenia,
 - i promień bezwładności przekroju brutto względem odpowiedniej osi,
- λ_1 smukłość graniczna (odniesienia) przy osiągnięciu przez siłę krytyczną charakterystycznej wartości nośności przekroju, którą oblicza się ze wzoru

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 93.9\varepsilon , \qquad (34)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} \quad (f_y \le \text{N/mm}^2).$$
(35)

W PN-EN 1993-1-1 przyjęto 5 krzywych wyboczeniowych: a_0 , a, b, c i d (rys. 3.32), którym przynależą odpowiednio parametry imperfekcji $\alpha = 0,13, 0,21, 0,34, 0,49$ i 0,76. Przyporządkowanie krzywych wyboczeniowych w PN-EN 1993-1-1 do grupy elementów opisanych tym samym parametrem imperfekcji α odbywa się w zależności od rodzaju, proporcji jego podstawowych wymiarów, płaszczyzny wyboczenia, technologii i gatunku zastosowanej stali. Przyporządkowanie krzywych wyboczeniowych dokonuje się zgodnie z tabl. 1 w zależności od rodzaju przekroju, technologii jego wykonania i płaszczyzny wyboczenia.

Rodzaj elementu i typ przekroju		Ograniczenia		Wybo- czenie względem osi	Krzywa wyboczenia	
					S235 S275 S355 S420	S460
Dwuteowniki walcowane	$\begin{array}{c} t_{t} \\ z \\ y \\ \vdots \\ z \\ \vdots \\ z \\ \vdots \\ b \\ b \\ \end{array}$	1,2	<i>t</i> _f ≤ 40 mm	$\begin{array}{c} y - y \\ z - z \end{array}$	a b	a ₀ a ₀
		< q/4	40 mm < $t_f \le 100$	$\begin{array}{c} y - y \\ z - z \end{array}$	b c	a a
		1,2	<i>t</i> _f ≤ 100 mm	$\begin{array}{c} y - y \\ z - z \end{array}$	b c	a a
		h/b ≤	<i>t_t</i> > 100 mm	y-y z-z	d d	c c
Dwu- teowniki spawane	$y - \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + $	<i>t</i> ₇ ≤ 40 mm		$\begin{array}{c} y - y \\ z - z \end{array}$	b c	b c
		<i>t_t</i> > 40 mm		y-y z-z	c d	c d
Kształ- towniki rurowe		wykończone na gorąco		dowolnej	а	a ₀
		wykończone na zimno		dowolnej	с	c
2 ee	$h y + \frac{z + t_i}{z + t_w} y$	dowolne z wyjątkiem jak niżej		dowolnej	b	b
Elementy skrzynkow spawane		grube spoiny:		dowolnej	c	c
Ceowniki, teowniki i pręty pełne				dowolnej	с	c
Kątow- niki	l l				b	b

Tablica 1. Przyporządkowanie krzywych wyboczeniowych według PN-EN 1993-1-1

6. Nośność jednogałęziowych prętów ściskanych osiowo

Warunek nośności ze względu na wyboczenie elementu o stałym przekroju, osiowo ściskanego obliczeniową siłą podłużną N_{Ed} wg PN-EN 1993-1-1 ma postać:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \le 1,\tag{36}$$

gdzie $N_{b,Rd}$ – nośność na wyboczenie elementu ściskanego, która jest określona wzorami:

• przekroje klasy 1, 2 i 3

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M1}}, \qquad (37)$$

przekroje klasy 4

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A_{eff} f_y}{\gamma_{M1}},$$
(38)

w których:

 χ – współczynnik wyboczenia, odpowiadający miarodajnej postaci wyboczenia pręta,

A, A_{eff} – odpowiednio przekrój brutto i efektywny (współpracujący) pręta,

 $f_{\rm y}$ – granica plastyczności stali,

 γ_{M1} – częściowy współczynnik nośności z warunku utraty stateczności, $\gamma_{M1} = 1,00$.

Współczynnik wyboczeniowy χ elementów ściskanych osiowo wyznacza się ze wzoru (30), w zależności od smukłości względnej $\overline{\lambda}$, parametru imperfekcji α oraz odpowiedniej krzywej wyboczenia. Zagadnienie to omówiono w rozdziale 5.

Wzór (38) jest ważny tylko wówczas, gdy środek ciężkości przekroju współpracującego (A_{eff}) pokrywa się ze środkiem przekroju brutto (*A*). Taki przypadek zachodzi zawsze, gdy osiowo ściskany przekrój jest bisymetryczny klasy 4 (rys. 20d, e). Jeśli osiowo ściskany przekrój jest monosymetryczny (rys. 20a, b) lub niesymetryczny klasy 4 należy go obliczać jako ściskany i zginany dodatkowym momentem $\Delta M_{Ed} = N_{Ed}e_N$, który wynika z przesunięcia o e_N środka ciężkości przekroju współpracującego (A_{eff}) w stosunku do środka ciężkości przekroju brutto (*A*).

W elementach ściskanych o przekroju klasy 4, gdy wskutek przesunięcia środka ciężkości ich przekroju współpracującego o e_N (w stosunku do środka ciężkości przekroju brutto) może powstać dodatkowy moment $\Delta M_{Ed} = N_{Ed}e_N$. Wówczas stosuje się interakcyjne warunki stateczności podane w PN-EN 1993-1-1 (ściskanie ze zginaniem – zagadnienie to omówiono w rozdziale 7).



Rys. 20. Rozkłady naprężeń w przekrojach monosymetrycznych i bisymetrycznych klasy 4, ściskanych oraz ściskanych i zginanych

W przypadku analizy wyboczenia elementów konstrukcji nośnej budynków do określenia długości wyboczeniowej L_{cr} prętów kratownic o przekrojach otwartych i rurowych, a także do określenia roli usztywnień bocznych i przeciwskrętnych stosuje się postanowienia Załącznika BB do PN-EN 1993-1-1.

Zgodnie z Załącznikiem BB.1.1 do PN-EN 1993-1-1 (*Wyboczenie elementów konstrukcji budynków*) dla pasów kratownic oraz elementów skratowania – przy wyboczeniu z płaszczyzny układu przyjmuje się długość wyboczeniową L_{cr} równą długości teoretycznej L, chyba, że mniejsza wartość jest uzasadniona analitycznie. W przypadku dwuteowych (I i H) pasów kratownic przyjmuje się długość wyboczeniową: w płaszczyźnie $L_{cr} = 0.9L$ z płaszczyzny $L_{cr} = L$, chyba, że mniejsza wartość jest uzasadniona analitycznie. Jeśli pasy zapewniają od-powiedni stopień zamocowania to można przyjmować dla skratowania typowych kratownic w płaszczyźnie ustroju $L_{cr} = 0.9L$. Długości wyboczeniowe rurowych pasów kratownic płaskich - w płaszczyźnie i - z płaszczyzny ustroju można przyjmować $L_{cr} = 0.9L$. Długość L w płaszczyźnie układu jest odległością między węzłami, natomiast długość L przy wyboczeniu z płaszczyzny układu jest równa rozstawowi stężeń bocznych. Jeśli pasy zapewniają odpowiedni stopień zamocowania (których końce – bez spłaszczeń i wyobleń – są całym obwodem przyspawane do pasów) to dla skratowania (krzyżulców i słupków) typowych kratownic rurowych w płaszczyźnie ustroju oraz z płaszczyzny ustroju można przyjąć $L_{cr} = 0.75L$.

W PN-EN 1993-1-1 nie podano natomiast zaleceń określania długości wyboczeniowych L_{cr} elementów prętowych konstrukcji ramowych. Takie zalecenia i nomogramy do wyznaczania współczynników długości wyboczeniowych ramowych konstrukcji nieprzechyłowych i przechyłowych zamieszczono w rozdziale 3.

7. Nośność jednogałęziowych prętów ściskanych i zginanych

Zagadnienie nośności prętów ściskanych i zginanych jest jednym z bardziej złożonych problemów wytrzymałościowych. Na jego skomplikowanie składa się kilka zjawisk, które są interakcyjnie połączone:

- stateczność ogólna pręta ściskanego (wyboczenie),
- utrata płaskiej postaci zginania (zwichrzenie),
- zmniejszenie nośności granicznej w stosunku do teoretycznego obciążenia krytycznego pręta ściskanego (wpływ imperfekcji geometrycznych, montażowych i technologicznych na utratę stateczności),
- zapasy nośności plastycznej pręta zginanego,
- wpływ przemieszczeń na wielkość sił wewnętrznych oraz
- wpływ rozkładu momentu zginającego na długości pręta ściskanego na jego nośność.

Wymienione zjawiska (jako istotne z punktu widzenia bezpieczeństwa), były przedmiotem szkicowych analiz w poprzednich rozdziałach. Bardziej szczegółowe omówienie tych zagadnień można znaleźć w literaturze dotyczącej teorii konstrukcji metalowych np. [1], [14].

Ocena nośności elementów jednocześnie ściskanych i zginanych jest jednym z trudniejszych przypadków w projektowaniu konstrukcji stalowych. Takie elementy są najczęściej fragmentami ustrojów prętowych (termin ten odnosi się zarówno do ustrojów ramowych, jak i kratowych; obejmuje zarówno ustroje płaskie jak i trójwymiarowe). Dlatego sprawdzenie ich nośności powinno się prowadzić z uwzględnieniem efektów II rzędu oraz imperfekcji. Według PN-EN 1993-1-1 warunki nośności elementów ściskanych i zginanych są następujące

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} \le 1,$$
(39)

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} \le 1,$$
(40)

gdzie:

 N_{Ed} , $M_{y,Ed}$, $M_{z,Ed}$ – wartości obliczeniowe odpowiednio: siły ściskającej i momentów zginających względem osi y - y oraz z - z,

$$N_{Rk}$$
, $M_{y,Rk}$, $M_{z,Rk}$ – charakterystyczne wartości nośności przekroju ($\gamma_{M0} = 1,0$) od-
powiednio na ściskanie i zginanie, z uwzględnieniem plastycz-
nych, sprężystych lub efektywnych charakterystyk przekrojów,
w zależności od jego klasy,

 $\Delta M_{y,Ed}$, $\Delta M_{z,Ed}$ – ewentualne momenty zginające spowodowane przesunięciem środka ciężkości przekroju klasy 4,

$$\chi_y, \chi_z, \chi_{LT}$$
 – odpowiednio współczynnik wyboczenia względem osi $y-y$ i $z-z$ oraz współczynnik zwichrzenia,

$$k_{yy}, k_{yz}, k_{zz}$$
 – współczynniki interakcji wg tabl. 2, 3 i 4.

Ewentualne dodatkowe momenty zginające $\Delta M_{y,Ed}$, $\Delta M_{z,Ed}$ są spowodowane przesunięciem środka ciężkości przekroju klasy 4 (rys. 20, 21). Wówczas siła ściskająca N_{Ed} działa na mimośrodzie $e_{i,N}$ i dodatkowy moment zginający $\Delta M_{i,Ed}$ wynosi

$$\Delta M_{i,Ed} = N_{Ed} e_{i,N} \,. \tag{41}$$

W PN-EN 1993-1-1 współczynniki interakcji k_{yy} , k_{yz} , k_{zz} można obliczać alternatywnie według Załącznika A do PN-EN 1993-1-1 – Metoda 1 lub według Załącznika B do PN-EN 1993-1-1 – Metoda 2. Załącznik Krajowy do PN-EN 1993-1-1 zaleca obliczanie współczynnika interakcji według Metody 2. Podano je w tabl. 2, 3 i 4.


Rys. 21. Efektywna geometria zginanego przekroju klasy 4: dwuteowego (a) i skrzynkowego (b)

Tablica 2. Współczynniki interakcji k_{yy} , k_{yz} , k_{zz} dla elementów niewrażliwych na deformacje skrętne wg PN-EN 1993-1-1

Współczynniki	Туру	Założenia projektowe					
interakcji	przekrojów	Przekroje klasy 3 i 4	Przekroje klasy 1 i 2				
K _{yy}	dwuteowe, zamknięte prostokątne	$C_{my} \left(1 + 0.6\overline{\lambda}_y \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk}/\gamma_{M1}} ight) \le \le C_{my} \left(1 + 0.6 \frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk}/\gamma_{M1}} ight)$	$C_{my}\left(1 + (\overline{\lambda}_{y} - 0.2) \frac{N_{Ed}}{\chi_{y} N_{Rk}/\gamma_{M1}}\right) \leq \\ \leq C_{my}\left(1 + 0.8 \frac{N_{Ed}}{\chi_{y} N_{Rk}/\gamma_{M1}}\right)$				
K _{yz}	dwuteowe, zamknięte prostokątne	k _{zz}	0,6 <i>k</i> zz				
K _{zy}	dwuteowe, zamknięte prostokątne	0,8 <i>k_{yy}</i>	0,6 <i>k</i> _{yy}				
k	dwuteowe	$C_{mz} \left(1 + 0.6 \overline{\lambda}_z \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right) \le$	$C_{mz}\left(1 + (2\overline{\lambda}_{y} - 0.6) \frac{N_{Ed}}{\chi_{z} N_{Rk}/\gamma_{M1}}\right) \leq \\ \leq C_{mz}\left(1 + 1.4 \frac{N_{Ed}}{\chi_{z} N_{Rk}/\gamma_{M1}}\right)$				
K _{zz}	zamknięte prostokątne	$\leq C_{mz} \left(1 + 0.6 \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk} / \gamma_{M1}} \right)$	$C_{mz}\left(1 + (\overline{\lambda}_{y} - 0.2) \frac{N_{Ed}}{\chi_{z} N_{Rk} / \gamma_{M1}}\right) \leq C_{mz}\left(1 + 0.8 \frac{N_{Ed}}{\chi_{z} N_{Rk} / \gamma_{M1}}\right)$				

Współczynniki	Założenia projektowe							
interakcji	Przekoje klasy 3 i 4	Przekroje klasy 1 i 2						
k _{yy}	kyy według tablicy 2	kyy według tablicy 2						
k _{yz}	kyz według tablicy 2	k_{yz} według tablicy 2						
K _{zy}	$\begin{bmatrix} 1 - \frac{0,05\bar{\lambda}_{z}}{(C_{mLT} - 0,25)} \frac{N_{Ed}}{\chi_{z}N_{Rk}/\gamma_{M1}} \end{bmatrix} \ge \\ \ge \begin{bmatrix} 1 - \frac{0,05}{(C_{mLT} - 0,25)} \frac{N_{Ed}}{\chi_{z}N_{Rk}/\gamma_{M1}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 - \frac{0, 1\overline{\lambda}_z}{(C_{mLT} - 0, 25)} \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}/\gamma_{M1}} \end{bmatrix} \ge \\ \ge \begin{bmatrix} 1 - \frac{0, 1}{(C_{mLT} - 0, 25)} \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}/\gamma_{M1}} \end{bmatrix} \\ \text{przy } \overline{\lambda}_z < 0, 4; \\ k_{zy} = 0, 6 + \overline{\lambda}_z \le \begin{bmatrix} 1 - \frac{0, 1\overline{\lambda}_z}{(C_{mLT} - 0, 25)} \frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}/\gamma_{M1}} \end{bmatrix}$						
k _{zz}	k_{zz} według tablicy 2	kzz według tablicy 2						

Tablica 3. Współczynniki interakcji k_{yy} , k_{yz} , k_{zz} dla elementów wrażliwych na deformacje skrętne wg PN-EN 1993-1-1

Tablica 4. Współczynniki równoważnego stałego momentu C_m w tabl. 2 i 3

Mulare recordention	7-1		C _{my} , C _{mz} i C _{mLT}			
wykres momentow	Zak	res	Obciążenie równomierne	Obciążenie skupione		
м	1 ≤	$\psi \leq 1$	$0,6+0,4\psi \ge 0,4$			
Ψ <i>Μ</i>	$0 \le \alpha_s \le 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,2+0,8\alpha_s\geq 0,4$	$0,2+0,8\alpha_s \ge 0,4$		
Mh Ms WM	$-1 \leq \alpha_s < 0$	$0 \le \psi \le 1$	$0,1+0,8lpha_s\geq 0,4$	$-0.8\alpha_s \ge 0.4$		
$\alpha_s = M_s / M_h$		$-1 \leq \psi < 0$	$0,1(1-\psi)-0,8\alpha_s \ge 0,4$	$0,2(-\psi)-0,8\alpha_{s} \ge 0,4$		
<i>M_h ΨM</i>	$0 \le \alpha_h \le 1$	$-1 \leq \psi \leq 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90+0,10\alpha_h$		
	$-1 \leq \alpha_b < 0$	$0 \le \psi \le 1$	$0,95 + 0,05\alpha_h$	$0,90+0,10\alpha_h$		
$\alpha_h = M_h/M_s$		$-1 \leq \psi < 0$	$0,95+0,05 lpha_h (1+2 \psi)$	$0,90+0,10\alpha_{h}(1+2\psi)$		
W przypadku przechyłowej form <i>C_{my}</i> , <i>C_{mz}</i> i <i>C_{mLT}</i> powinny być us następuje:	ny wyboczenia m talone odpowiedr	ożna przyjmowa nio do rozkładu r	i dpowiednio C _{my} = 0,9 lul nomentów zginających międ	b <i>C_{mz}</i> = 0,9. zy punktami stężenia, jak		

współczynnik momentu	oś zginania	kierunek podparcia	
Cmy	у-у	Z-Z	
C _{mz}	Z-Z	у-у	
C_{mLT}	у-у	у-у	

Proponowana w PN-EN 1993-1-1 procedura oceny nośności prętów jednocześnie zginanych i ściskanych jest złożona i obliczenia według (39) i (40) są pracochłonne.

Załącznik Krajowy do PN-EN 1993-1-1 (w punkcie NA.20 – p. 2) proponuje alternatywnie, w celu szybkiego sprawdzenia rozważanego przypadku wytężenia pręta, stosowanie uproszczonego warunku nośności, korzystając ze wzorów

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rd}} + C_{my} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT}} + C_{mz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rd}}{\gamma_{M1}}} \le 1 - \Delta_0, \qquad (42)$$

$$\frac{\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rd}}}{\gamma_{M1}} + C_{my} \frac{\frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rd}}{\gamma_{M1}}} + C_{mz} \frac{\frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}}}{\frac{M_{z,Rd}}{\gamma_{M1}}} \le 1 - \Delta_0,$$
(43)

gdzie:

 N_{Ed} , $M_{y,Ed}$, $M_{z,Ed}$ – wartości obliczeniowe odpowiednio: siły ściskającej i momentów zginających względem osi y - y oraz z - z,

- N_{Rd} , $M_{y,Rd}$, $M_{z,Rd}$ obliczeniowe wartości nośności przekroju ($\gamma_{M0} = 1,0$) odpowiednio na ściskanie i zginanie, z uwzględnieniem plastycznych, sprężystych lub efektywnych charakterystyk przekrojów, w zależności od jego klasy,
 - $\Delta M_{y,Ed}$, $\Delta M_{z,Ed}$ ewentualne momenty zginające spowodowane przesunięciem środka ciężkości przekroju klasy 4,
 - χ_y , χ_z , χ_{LT} odpowiednio współczynnik wyboczenia względem osi y y i z z oraz współczynnik zwichrzenia,

 C_{my} , C_{mz} – współczynniki momentu wg tabl. 4,

 Δ_0 – składnik poprawkowy (oszacowanie maksymalnej redukcji):

 $\Delta_0 = 0,1$ - w przypadku przekrojów klas 3 i 4,

 $\Delta_0 = 0, 1+0, 2(w_i - 1)$ - w przypadku przekrojów klas 1 i 2,

przy czym współczynnik rezerwy plastycznej oblicza się ze

wzoru
$$w_i = \frac{W_{pl,i}}{W_{el,i}}$$
.

8. Nośność wielogałęziowych prętów ściskanych osiowo

Przedstawione w poprzednich rozdziałach procedury obliczeniowe są ważne dla prętów obciążonych osiowo, których przekrój poprzeczny jest jednogałęziowy. W wielu rozwiązaniach konstrukcyjnych ściskanych elementów stalowych (słupy, pręty kratownic, stężenia itp.) stosuje się wielogałęziowe przekroje poprzeczne (rys. 22). Przekroje poprzeczne tych elementów są złożone. Składają się one z gałęzi (pasów) połączonych skratowaniem lub przewiązkami na całej długości. Na końcach skratowania, w miejscach nieciągłości lub w miejscach dołączenia innych elementów, należy stosować przepony, które wykonuje się w postaci blach (albo krzyżowego skratowania). Ponadto na końcach skratowania powinny być zaprojektowane powiększone przewiązki.

W aspekcie kształtu przekroju poprzecznego, jego promień bezwładności *i* (obok długości wyboczeniowej L_{cr}) ma podstawowy wpływ na nośność pręta ściskanego. Rozstawianie gałęzi w prętach złożonych ma na celu zwiększenie tego parametru, co powoduje wzrost nośności pręta na ściskanie (bez zwiększenia ilości zastosowanego materiału).



Rys. 22. Przykłady przekrojów prętów wielogałęziowych

Prętami złożonymi (wielogałęziowymi) nazywa się ustroje składające się z kilku (najczęściej dwóch) gałęzi, połączonych przewiązkami lub skratowaniami (rys. 23, 24b i c). Odległość miedzy przewiązkami lub węzłami wykratowań *a* nazywa się przedziałem. Takie pręty z przewiązkami (rys. 23a, 24c) projektuje się najczęściej, gdy są one tylko ściskane osiowe. W przypadku ich dodatkowego wytężenia siłą poprzeczną i/lub momentem zginającym gałęzie łączy się wykratowaniem (rys. 23b, 24b).



Rys. 23. Konstrukcja słupa dwugałęziowego z przewiązkami (a), z wykratowaniem (b)

Ściskany element wielogałęziowy przy wyboczeniu giętnym w płaszczyźnie prostopadłej do osi przechodzącej przez materiał gałęzi jest sprawdzany wytrzymałościowo jak pręt jednogałęziowy. Natomiast według PN-EN 1993 -1-1 przy wyboczeniu giętnym w płaszczyźnie prostopadłej do osi nieprzechodzącej przez materiał, pas należy traktować jak pręt ściskany mimośrodowo. Wówczas w analizie ściskanych elementów z przewiązkami lub skratowaniem nie można na ogół pomijać odkształceń postaciowych (wpływu sił poprzecznych) oraz ich redukcyjnego wpływu na obciążenie graniczne.

Z powodu braku ciągłości konstrukcyjno-materiałowej wszystkie rodzaje prętów złożonych charakteryzuje mała sztywność (duża podatność) przekroju poprzecznego na ścinanie. W związku z tym w obliczeniach prętów złożonych uwzględnia się zawsze sztywność przekroju na ścinanie. Według PN-EN 1993-1-1 sztywność na ścinanie pręta złożonego oznacza się S_V ($S_V = GA_z$).

Według PN-EN 1993-1-1 ściskane elementy dwu- oraz wielogałęziowe (złożone), podparte przegubowo należy projektować wg modelu obliczeniowego pokazanego na rys. 24a. Elementy te, o długości *L* traktuje się jako pręty ze wstępną, jawną imperfekcją o wartości:

$$e_0 = \frac{L}{500},$$
 (44)

którą uwzględnia się w analizie wytężenia ustroju.



Rys. 24. Schemat modelu obliczeniowego elementów złożonych o pasach równoległych

Deformacje sprężyste skratowania i przewiązek w tym modelu obliczeniowym uwzględnia się za pomocą ciągłej (rozmytej) sztywności postaciowej S_V . Ponadto zakłada się, że pasy tego pręta są równoległe, a liczba jego przedziałów jest większa od 3. Spełnienie tych wymagań pozwala traktować konstrukcję jako pełnościenną i regularną. Omawianą procedurę obliczeniową stosuje się również w przypadku elementów skratowanych w 2 płaszczyznach.

W związku z takim modelem teoretycznym, zagadnienie ściskania osiowego pręta złożonego zastępuje się ściskaniem mimośrodowym w ujęciu według teorii II rzędu - z pominięciem ogólnego współczynnika wyboczeniowego χ .

Z zaleceń PN-EN 1993-1-1 wynika dwuetapowy charakter obliczeń nośności słupów wielogałęziowych.

W I etapie słup wielogałęziowy traktowany jest tak jak pręt pełnościenny o sztywności na zginanie EI oraz sztywności na ścinanie S_V .

W II etapie, na podstawie znanych wartości M^{II} oraz V^{II} są określane siły przekrojowe w poszczególnych gałęziach i w skratowaniu (w przewiązkach). Elementy te są następnie sprawdzane na ściskanie, zginanie i ścinanie jak zwykłe elementy pełnościenne.

Obliczeniową siłę w pasie (gałęzi) słupa $N_{ch,Ed}$ oblicza się na podstawie siły podłużnej N_{Ed} oraz momentu M_{Ed} w elemencie złożonym.

W przypadku dwóch jednakowych pasów, siłę $N_{ch,Ed}$ wyznacza się ze wzoru

$$N_{ch,Ed} = \frac{N_{Ed}}{2} + \frac{M_{Ed}h_0A_{ch}}{2I_{eff}},$$
(45)

w którym

$$M_{Ed} = \frac{N_{Ed}e_0 + M_{Ed}^1}{1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}} - \frac{N_{Ed}}{S_v}},$$
(46)

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI_{eff}}{L^2}, \qquad (47)$$

gdzie:

 $N_{\it Ed}\,$ – obliczeniowa siła ściskająca elementu złożonego,

- M_{Ed} maksymalny, obliczeniowy przęsłowy moment zginający wyznaczony według teorii II rzędu,
- M_{Ed}^{I} maksymalny, obliczeniowy przęsłowy moment zginający określony według teorii I rzędu,
 - S_V sztywność postaciowa słupa,

 h_0 – osiowy rozstaw pasów (gałęzi),

- A_{ch} pole przekroju pasa (gałęzi),
- I_{eff} zastępczy moment bezładności przekroju złożonego $I_{eff} = 0.5 h_0^2 A_{ch}$,

W przypadku pręta złożonego z przewiązkami jego sztywność postaciową S_V wyznacza się ze wzoru

$$S_{V} = \frac{24EI_{ch,z1}}{a^{2} \left[1 + \frac{2I_{ch,z1}h_{0}}{anI_{b}}\right]} \leq \frac{2\pi^{2}EI_{ch,z1}}{a^{2}},$$
(48)

gdzie:

 $I_{ch,z1}$ – moment bezwładności pasa (gałęzi) względem osi z_1 ,

 $I_{b}\,$ – moment bezwładności jednej przewiązki w płaszczyźnie układu,

a – osiowy rozstaw przewiązek,

n – liczba płaszczyzn przewiązek.

Zasady określania sztywności postaciowej elementów złożonych z wykratowaniem według PN-EN 1993-1-1 podano na rys. 25.



Rys. 25. Sztywności skartowania w elementach złożonych wg PN-EN 1993-1-1

Ponadto pasy należy sprawdzić na wyboczenie giętne w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny skratowania, przyjmując długość wyboczeniową gałęzi równą długości teoretycznej między węzłami skratowania. Gdy pasy są wykonane z dwóch gałęzi, każdy z kątowników równoramiennych, także połączonych skratowaniem prostopadłym do skratowania głównego, to długość wyboczeniowa gałęzi przy wyboczeniu względem najmniejszej bezwładności jest zależna od geometrycznego układu skratowań i powinna być przyjmowana według zasad pokazanych na rys. 26.



Rys. 26. Długości wyboczeniowe skratowań, gdy pasy są wykonane z kątowników równoramiennych

Sprawdzenie nośności prętów skratowania lub przewiązek (przy zginaniu ze ścinaniem) przeprowadza się dla ich skrajnych przedziałów. Uwzględnia się wówczas siłę poprzeczną w elemencie złożonym, która wynosi

$$V_{Ed} = \pi \frac{M_{Ed}}{L} \,. \tag{49}$$

gdzie: M_{Ed} - według (46), L - jak w (44).

Stąd podłużna siła w krzyżulcu wynosi

$$N_d = \frac{V_{Ed}d}{nh_0},\tag{50}$$

przy czym: d, h_0 , n - według rys. 26.

Pasy (gałęzie) pręta wielogałęziowego i jego krzyżulce ściskane wymiaruje się uwzględniając wyboczenie. Warunek stateczności pasów ma postać

$$\frac{N_{ch,Ed}}{N_{b,Rd}} \le 1,\tag{51}$$

gdzie:

 $N_{{\it ch},{\it Ed}}$ – obliczeniowa siła ściskająca w pasie, w środku jego długości,

 $N_{b, Rd}\,$ – nośność obliczeniowa na wyboczenie pasa (gałęzi).

Gałęzie prętów złożonych ściskanych osiowo łączy się przewiązkami (rys. 23a, 24c). W przypadku ogólnym należy uwzględniać podatność przewiązek, ustalając ich sztywność postaciową

$$S_{v} = \frac{24EI_{ch}}{a^{2} \left(1 + \frac{2I_{ch}}{nI_{b}} \cdot \frac{h_{0}}{a}\right)} \leq \frac{2\pi^{2}EI_{ch}}{a^{2}}.$$
(52)

We wzorze (47) zastępczy moment bezwładności elementu złożonego z przewiązkami można obliczyć ze wzoru

$$I_{eff} = 0.5h_0^2 A_{ch} + 2\mu I_{ch},$$
(53)

gdzie:

 $I_{ch}\,-\,$ moment bezwładności przekroju pasa w płaszczyźnie układu,

- $I_b \ \ {\rm moment}$ bezwładności przekroju jednej przewiązki w płaszczyźnie układu,
- μ wskaźnik efektywności wg tabl. 5,
- n liczba płaszczyzn przewiązek.

Przedział smukłości λ ≥ 150	Wskaźnik µ 0
75 < λ < 150	$\mu = 2 - \frac{\lambda}{75}$
$\lambda \le 75$	1,0
$\label{eq:gdzie} \boxed{ gdzie \ \lambda = \frac{L}{i_0} \ ; \ i_0 = \sqrt{\frac{I_1}{2A_{ch}}} }$	$I_1 = 0.5h_0^2A_{ch} + 2I_{ch}$

Tablica 5. Wskaźnik efektywności μ

Element złożony z przewiązkami odwzorowuje się modelem belki Vierendeela wskutek czego w pasie pojawia się siła poprzeczna (gdy rozpatruje się tylko jego obciążenie osiowe) i stowarzyszony z nią moment zginający (rys. 27). Ta siła poprzeczna spowodowana jest przez imperfekcję i wyznaczana jest ze wzoru (49) w którym M_{Ed} ustala się, przyjmując N_{cr} oraz S_{ν} przekroju z przewiązkami. Przewiązkę i jej połączenie z gałęzią słupa oblicza się na wartości sił wewnętrznych modelu Vierendeela.



Rys. 27. Model belki Vierendeela do wyznaczania momentów zginających i sił poprzecznych w pasach i przewiązkach elementu złożonego

Pokazane na rys. 28 ściskane elementy złożone, w których gałęzie rozmieszczono w małych odstępach (tzw. elementy bliskogałęziowe) i połączono przewiązkami. Nie wymagają one sprawdzenia według procedury przedstawionej uprzednio, jeżeli rozstaw spoin lub łączników mechanicznych nie przekracza $15i_{min}$ (i_{min} – najmniejszy promień bezwładności gałęzi). Połączenia przekładek oblicza się na przeniesienie siły rozwarstwiającej o wartości $V_{T,Ed} = 0,25V_{Ed}a/i_{min}$, przy czym $V_{Ed} = 0,025N_{Ed}$ lub też wartość V_{Ed} określa się według uprzednio przedstawionej procedury odnoszącej się do złożonych prętów z przewiązkami.



Rys. 28. Ściskane elementy złożone z przekładkami

Jeśli elementy złożone, składają się z dwóch kątowników, łączonych przekładkami w dwóch płaszczyznach wzajemnie prostopadłych (rys. 29), to można je sprawdzać na wyboczenie giętne względem osi y - y jak pręty jednogałęziowe pod warunkiem, że długości wyboczeniowe w obu prostopadłych płaszczyznach, przechodzących przez osie y - y oraz z - zsą równe, a odległość miedzy przekładkami nie przekracza $70i_{min}$. W przypadku kątowników nierównoramiennych można przyjąć $i_y = 0,87i_0$ (gdzie i_0 – najmniejszy promień bezwładności przekroju złożonego).



Rys. 29. Elementy złożone z kątowników, połączone przewiązkami w układ "gwiaździsty"

9. Przekroje poprzeczne trzonów słupów

Przekroje poprzeczne elementów ściskanych (trzonów słupów, prętów kratownic, stężeń, zastrzałów itp.) mogą być jednogałęziowe lub wielogałęziowe. Pręty jednogałęziowe projektuje się z kształtowników walcowawych na gorąco lub giętych na zimno, a także z ich zestawu oraz złożonych z blach. Ściskane elementy wielogałęziowe składają się z dwóch lub wielu gałęzi, które tworzy się analogicznie jak gałąź pojedynczą. Gałęzie takich elementów ściskanych są wzajemnie połączone przewiązkami lub skratowaniem.

Sposoby kształtowania elementów ściskanych przedstawiono na przykładzie trzonów słupów obciążonych osiowo i mimośrodowo.

Przykłady przekrojów poprzecznych słupów jednogałęziowych (pełnościennych) pokazano na rys. 30. Ściskane elementy prętowe można kształtować o przekrojach bisymetrycznych (np. na rys. 30a÷n), monosymetrycznych (rys. 30o, p, t, u, v), niesymetrycznych, otwartych (rys. 30d, e, j÷v), zamkniętych (rys. 30a÷c, f÷g), jednogałęziowych (rys. 30), wielogałęziowych (rys. 31). W zależności od technologii ich wykonania można je podzielić na walcowane (np. rys. 30d÷g), kształtowane w wyniku gięcia blach na zimno, spawane z blach (np. rys. 30i, j) oraz zestawu blach i kształtowników walcowanych (np. rys. 30l÷v).



Rys. 30. Przykłady przekrojów słupów jednogałęziowych (pełnościennych)



Rys. 31. Przykłady przekrojów słupów wielogałęziowych

Przekroje poprzeczne słupów ściskanych osiowo kształtuje się w sposób pokazany na rys. 30÷g, i, l, oraz rys. 31a, b, m÷p.

Słupy główne budynków i hal są najczęściej prętami ściskanymi i zginanymi jednokierunkowo lub dwukierunkowo. Ukształtowanie geometryczne na ich długości zależy przede wszystkim od wartości wytężenia ściskającego i zginającego oraz funkcji tych elementów (np. oparcie belek podsuwnicowych). W takich przypadkach na trzony słupów stosuje się przekroje jak na rys. 30j+v) oraz na rys. 31a+1. Kształty i wymiary przekrojów poprzecznych słupów zależą od ich wysokości, sposobu podparcia ich końców, wartości sił osiowych i momentu zginającego, stosunku momentu do siły osiowej (czyli mimośrodu) i płaszczyzny działania momentu. Jeśli wpływ momentu zginającego jest mały, to słupom ściskanym mimośrodowo nadaje się przekrój podobny do słupów ściskanych osiowo (stosuje się przekroje "zwarte" np. rurowe, dwuteowniki HEB, HEA, skrzynkowe spawane z dwóch ceowników). W przeciwnym razie, gdy występuje duży moment zginający lub duży mimośród, przekroje słupów są wydłużone w płaszczyźnie działania momentu. Mogą to być przekroje pełnościenne dwuteowe (rys. 30d, j, k, l), bądź skrzynkowe (rys. 30b, c, f, h, i), złożone z kształtowników walcowanych (rys. 30f, g, m+v), albo przekroje wielogałęziowe ze skratowaniem (rys. 30). Słupy, w których występują duże siły osiowe, a stosunkowo małe momenty zginające, korzystnie jest projektować jako pełnościenne (rys. 30), gdyż wówczas prawie w pełni wykorzystuje się nośność środnika. Konstruuje się je z pojedynczych walcowawych kształtowników dwuteowych (I, IPE, HEA, HEB) bądź rurowych lub spawanych, złożonych z blach i kształtowników walcowanych o przekrojach dwuteowych, quasi dwuteowych lub skrzynkowych.

Trzony słupów o przekrojach zamkniętych mogą być wypełnione betonem (rys. 30w). Do zalet słupów o przekrojach zamkniętych (rys. 30b, c, f, h, i) należy zaliczyć mały przekrój, możliwość dobrego zabezpieczenia przed korozją (mały współczynnik ekspozycji i załomów) oraz estetyczny wygląd. Wadami słupów skrzynkowych o przekroju złożonym (rys. 32f, h, i) jest ich pracochłonność oraz trudności związane z łączeniem z innymi elementami.

W budynkach i halach najczęściej stosuje się słupy z dwuteowników HEA lub HEB. Słupy z dwuteowników normalnych i IPE stosuje się przy mniejszych obciążeniach oraz możliwości ich usztywnienia na wyboczenie w płaszczyźnie mniejszej sztywności.

Słupy blachownicowe o dwuteowym przekroju bisymetrycznym (rys. 30j) zaleca się konstruować z zachowaniem następujących warunków;

- wysokość środnika $h_w = l/20 \div l/15$ (gdzie *l* wysokość słupa),
- grubość środnika $t_w = 6 \div 12 \text{ mm},$
- szerokość pasa (ze stali S235) $s \le 30 t_f$,
- grubość pasa $t_f = 10 \div 40$ mm.

Takie słupy są najczęściej wykonywane z zastosowaniem automatycznego spawania blach przekroju poprzecznego. W przypadku dwuteowych przekrojów, blachownicowych projektuje się je ze środnikami klasy co najmniej 3, gdyż ich nośność jest wykorzystana od wytężeń ści-skających.

W dwuteowym przekroju blachownicowym pokazanym na rys. 30k zastosowano środnik falisty z cienkiej blachy (2÷3 mm). Słupy takie są produkowane z zastosowaniem automatów spawalniczych (spoinami jednostronnymi). Nie wymagają one dodatkowego usztywniania ich środników żebrami poprzecznymi.

Gałęzie trzonów słupów wielogałęziowych (rys. 31) są połączone wiązaniami (przewiązkami lub/i skratowaniami). Geometrię wiązań słupów pokazano na rys. 32. Zapewniają one współpracę wszystkich elementów słupa podczas deformacji giętnej osi podłużnej trzonu od sił osiowych i poprzecznych. W takich słupach obciążonych osiowo występuje siła poprzeczna, którą oblicza się wg (49) i jako wiązania gałęzi stosuje się przewiązki (rys. 32 a).



Rys. 32. Schematy geometryczne (a, b, c, d, e) i rozmieszczenie (f, g, h) wiązań słupów wielogałęziowych: 1 – gałąź słupa, 2 – przewiązka, 3 – krzyżulec skratowania, 4 – słupek skratowania, 5 – wiązanie (przewiązka lub skratowanie)

W ściskanych i zginanych słupach, oprócz sił poprzecznych (pochodzących od imperfekcji geometrycznych ich osi podłużnej), występują siły poprzeczne od obciążeń zewnętrznych. W takim przypadku dostateczną sztywność i nośność trzonu słupa zapewniają skratowania gałęzi przekroju. Przewiązki łączące gałęzie słupa mogą być stosowane w słupach obciążonych osiowo lub małym momentem zginającym. Gałęzie słupów obciążonych mimośrodowo (ściskanych i zginanych), łączy się skratowaniem składającym się z krzyżulców (rys. 32c) lub słupków i krzyżulców (rys. 32b, d, e). Skratowanie słupa zginanego spełnia pod względem wytrzymałościowym taką samą rolę jak środnik w dźwigarze pełnościennym. Może być ono usytuowane w jednej (rys. 32f), dwóch (rys. 32g) lub trzech (rys. 32h) płaszczyznach. W celu uproszczenia rozwiązania konstrukcyjnego i technologicznego (uniknięcia stosowania blach węzłowych), dopuszcza się centrowanie osi ciężkości krzyżulców skratowania na zewnętrzne krawędzie gałęzi trzonu słupa.

Na pręty skratowania najczęściej stosuje się kątowniki, ceowniki lub rury. W budynkach halowych stosuje zazwyczaj się słupy dwugałęziowe ze skratowaniem, o przekroju stałym na wysokości lub zmiennym skokowo (w halach z suwnicami). Dzięki możliwości dowolnego "rozstawiania" gałęzi, słupy te mogą przenosić znaczne momenty zginające.

Trzony "wysokich" słupów wielogałęziowych wymagają dodatkowego stężenia poziomego za pomocą przepon, które powinny być usytuowane w odległości nie większej niż 4,0 m. Ich zadaniem jest zapewnienie odpowiedniej sztywności przekroju poprzecznego słupa na działanie losowego momentu skręcającego, jaki może wystąpić w fazie jego transportu, montażu, eksploatacji (np. od uderzeń wózków widłowych, samochodów itp.).



Rys. 33. Konstrukcje przepon słupów (opis w tekście)

W słupie dwugałęziowym przeponę może stanowić pojedynczy kątownik przyspawany do słupków wykratowania w sposób mimośrodowy względem gałęzi (rys. 33c,d). Jego przekrój poprzeczny dobiera się z warunku smukłości: $\lambda_{\eta} = l_1 / i_{\eta} \leq 150$, (gdzie i_{η} – promień bezwładności kątownika względem jego osi ukośnej η , l_1 – długość pręta - jak na rys. 33).

10. Projektowanie trzonów słupów

10.1. Wiadomości ogólne dotyczące projektowania słupów

Słupy najczęściej są jednym z elementów nośnych obiektów budowlanych. We wstępnym etapie ich projektowania należy podjąć niektóre decyzje dotyczące ich rozwiązań konstrukcyjnych (np. sposobu połączenia z innymi elementami na podporach oraz na swej długości – zabezpieczenie przed utratą stateczności ogólnej). Są one podstawą do przyjęcia schematu statycznego ustroju, sposobu przekazywania jego obciążeń, kształtu przekroju poprzecznego trzonu słupa, a także założenie wstępnych charakterystyk sztywnościowych (*EI*, *EA*). Jest to koncepcyjne kształtowanie ustroju nośnego obiektu, którego celem jest m.in. identyfikacja modelu obliczeniowego projektowanej konstrukcji.

W obliczeniowej części projektowania słupów można wyróżnić następujące elementy:

- przyjęcie założeń projektowych,
- identyfikacja schematu statycznego ustroju nośnego,
- zestawienie obciążeń stałych i zmiennych konstrukcji nośnej,
- wyznaczenie sił wewnętrznych i przemieszczeń w prętach ustroju od poszczególnych obciążeń oraz ekstremalnych dla najniekorzystniejszej kombinacji obciążeń stałych i zmiennych (wyznaczenie maksimum-maksimorum sił wewnętrznych w słupie M_{Ed} , N_{Ed} , V_{Ed}),

- założenie lub wstępne oszacowanie przekroju poprzecznego słupa oraz charakterystyk geometrycznych przekroju,
- ustalenie klasy przekroju poprzecznego słupa,
- wyznaczenie nośności przekroju słupa na zginanie M_{Rd} , na ściskanie N_{Rd} i ścinanie V_{Rd} ,
- obliczenie współczynnika wyboczenia χ oraz zwichrzenia χ_{LT} słupa,
- sprawdzenie stanu granicznego nośności (wytrzymałości) słupa,
- obliczenie żeber usztywniających przekrój poprzeczny (w przypadku słupów blachownicowych) lub wiązań gałęzi (w przypadku słupów wielogałęziowych),
- obliczenie głowicy słupa i jej połączenia montażowego z belką lub ryglem,
- obliczenie podstawy słupa.

Wyróżnione elementy procedury oceny nośności pręta ściskanego dotyczą przypadku ogólnego i nie wszystkie etapy obliczeniowe zawsze występują w analizie. Równocześnie mogą wystąpić dodatkowe, specyficzne dla projektowanej konstrukcji.

Na poprawne oszacowanie nośności i bezpieczeństwa elementów ściskanych ma wpływ właściwe ustalenie ich obciążenia i długości teoretycznej, a przede wszystkim identyfikacja schematów statycznych (sposobu zamocowania końców i długości wyboczeniowych w obu płaszczyznach). Ustalenie sposobu podparcia i rozpiętości pręta jest jedną z pierwszych czynności projektowych.

Odległość między teoretycznymi punktami podparcia słupa jest jego rozpiętością L. Jeśli słup jest oparty na fundamencie, to za punkt podparcia przyjmuje się dolną płaszczyznę płyty poziomej podstawy. Jeśli słup jest oparty za pośrednictwem łożyska to dolny punkt podparcia przyjmuje się w jego osi obrotu. W słupach połączonych przegubowo z belką, ryglem (np. dźwigarem pełnościennym lub kratowym) górny punkt podparcia słupa przyjmuje się w punkcie kontaktu tych elementów. W przypadku sztywnego połączenia słupa z belką lub ryglem górny punkt podparcia słupa ustala się jako punkt przecięcia ich osi.

Przyjęty do analizy schemat statyczny (model obliczeniowy) słupa powinien odwzorowywać wszystkie istotne parametry i czynniki mające wpływ na zachowanie się ustroju m.in. sztywności (podatności) elementów ich połączeń. Stopień złożoności modelu obliczeniowego powinien być uzasadniony z punktu widzenia ważności projektowanego elementu. W ustaleniu adekwatnego schematu statycznego słupa należy zwrócić szczególną uwagę na właściwe odwzorowanie sposobu podparcia lub połączenia jego końców z innymi elementami konstrukcji (przegubowe, sztywne lub podatne) oraz możliwości przemieszczeń ustroju. Zagadnienie właściwej identyfikacji schematu statycznego słupa zostało omówione w rozdziale 3. Wymiarowanie elementów ściskanych wykonuje się na podstawie uprzednio wyznaczonych sił wewnętrznych (M_{Ed} , N_{Ed} , V_{Ed}) obliczonych metodami mechaniki budowli.

W pierwszym etapie analiz zakłada się (lub ustala) wstępnie przekrój poprzeczny trzonu słupa. Kształt i charakterystyki przekroju poprzecznego przyjmuje się na podstawie oszacowanego lub założonego współczynnika wyboczeniowego χ (np. $\chi = 0,6 \div 0,8$) i zwichrzenia χ_{LT} ($\chi_{LT} = 0,6 \div 0,8$) oraz wartości sił wewnętrznych (M_{Ed} , N_{Ed} , V_{Ed}). Potrzebny przekrój słupa A_{pot} (w przypadku ściskania osiowego) można wstępnie oszacować korzystając ze wzoru

$$A_{pot} = \frac{N_{Ed}}{\chi f_y / \gamma_{M1}}, \qquad (54)$$

Projektowanie elementu ściskanego rozpoczyna się od ustalenia klasy jego przekroju. Klasa przekroju wyraża przede wszystkim stopień odporności elementu na utratę stateczności lokalnej tych jego ścianek, w których występują naprężenia ściskające. W przypadku prętów o przekrojach klasy 4 wyznacza się efektywne szerokości ściskanych ścianek kształtownika b_{eff} , a następnie jego efektywne charakterystyki geometryczne (A_{eff} , I_{eff} , W_{eff}). Wówczas ulegają redukcji szerokości ściskanych ścianek $b \rightarrow b_{eff}$, pole przekroju $A \rightarrow A_{eff}$, moment bezwładności $I \rightarrow I_{eff}$ oraz wskaźnik zginania $W \rightarrow W_{eff}$ cienkościennego kształtownika (przekrój brutto zmienia się na przekrój netto). Specyficznym zagadnieniem w tym przypadku jest zmiana położenia osi obojętnej przekroju efektywnego w stosunku do właściwego dla przekroju brutto przed lokalnym wyboczeniem ścianek kształtownika. Zmianę położenia osi obojętnej przekroju brutto względem przekroju netto pokazano na rys. 20. Fakt ten należy uwzględnić nie tylko, gdy oblicza się moment bezwładności I_{eff} oraz wskaźnik zginania W_{eff} , ale również określając wytężenie przekroju. Gdy przekrój jest ściskany siłą podłużną N_{Ed} , należy w takim przypadku uwzględnić dodatkowe wytężenie zginające cienkościenny kształtownik, które wyznacza się ze wzoru (41).

Zmiana położenia osi obojętnej przekroju brutto względem przekroju netto nie występuje tylko w przypadku prętów cienkościennych o przekrojach bisymetrycznych obciążonych osiowo (rys. 20e). Przysunięcie osi obojętnej występuje jeśli pręt ma przekrój różny od bisymetrycznego i jest ściskany osiowo (rys. 20b) oraz w przypadku, gdy ma dowolny przekrój i jest ściskany mimośrodowo (rys. 20c, f).

10.2. Obliczanie trzonów słupów jednogałęziowych ściskanych osiowo

Na przekroje poprzeczne trzonów słupów jednogałęziowych najczęściej stosuje się pojedyncze kształtowniki walcowane na gorąco (rys. 31a÷d). Takie przekroje stosuje się ze względu na technologię wytwarzania i niskie koszty robocizny warsztatowej. Korzystne jest stosowanie dwuteowników szerokostopowych HEA, HEB oraz rur o przekroju kołowym i kwadratowym. Dwuteowniki normalne i równoległościenne IPE nie są korzystne ze względu na zużycie materiału (gdyż i_y znacznie różni się od i_z). Jeśli występuje duże obciążenie słupa to przekrój tworzą odpowiednio zespawane kształtowniki walcowane i blachy (rys. 31f÷v).

Nośność trzonu słupa jednogałęziowego ściskanego osiowo sprawdza się ze wzorów (30)÷(38).

Po oszacowaniu potrzebnego przekroju poprzecznego słupa wg wzoru (54) należy określić jego klasę. Umożliwi to wyznaczenie obliczeniowej nośności przekroju na ściskanie $N_{c,Rd}$.

Kolejnym krokiem obliczeniowym jest wyznaczenie współczynnika wyboczeniowego χ . W przypadku występowania giętnych postaci wyboczenia słupa wyznaczenie współczynnika wyboczeniowego χ rozpoczyna się od identyfikacji długości teoretycznych L_y i L_z oraz współczynników długości wyboczeniowych k_y i k_z . Następnie należy określić smukłości rzeczywiste słupa λ_y i λ_z ze wzoru (8). Jako miarodajną do analizy wyboczenia słupa przyjmuje się smukłość

$$\lambda = \max(\lambda_y, \lambda_z). \tag{55}$$

W celu określenia smukłości odniesienia korzysta się ze wzoru (34) i (35) i oblicza się smukłość względną ze wzorów (32) lub (33).

Smukłość względną pręta ściskanego można również wyznaczyć na podstawie nośności krytycznej prętów ściskanych $N_{cr,i}$. Z takiej procedury obliczeniowej należy korzystać w przypadku analizy skrętnej i giętno-skrętnej postaci wyboczenia.

Współczynnik wyboczeniowy χ według odpowiedniej krzywej (a₀, a, b, c i d) ustala się w zależności od rodzaju, proporcji podstawowych wymiarów przekroju słupa, płaszczyzny wyboczenia, technologii i gatunku zastosowanej stali (wg tabl. 1). W celu obliczenia współczynnika wyboczeniowego korzysta się ze wzorów (30) i (31) (po uprzednim ustaleniu parametru imperfekcji α).

Sprawdzenie nośności elementu na wyboczenie przeprowadza się ze wzoru (36).

10.3. Obliczanie trzonów słupów wielogałęziowych ściskanych osiowo

Na trzony słupów wielogałęziowych stosuje się przekroje poprzeczne pokazane na rys. 32.

Obliczanie słupa dwugałęziowego rozpoczyna się od wstępnego przyjęcia kształtowników gałęzi oraz ich rozstawu h_0 i odległości przewiązek a (rys. 23, 24, 35). Następnie należy określić klasę przekroju gałęzi, co umożliwi to wyznaczenie obliczeniowej nośności przekroju na ściskanie $N_{c,Rd}$.

Schemat obliczeniowy oceny nośności słupa dwugałęziowego pokazano na rys. 34.



Rys. 34. Schematy konstrukcji (a, b, c) i obliczeniowy (d, e, f) słupa dwugałęziowego

W przypadku słupa dwugałęziowego ściskanego osiowo (rys. 34) należy sprawdzić jego nośność względem osi y-y, która przecina materiał gałęzi oraz względem osi z-z, która nie przecina materiał gałęzi.

Przy wyboczeniu giętnym w płaszczyźnie prostopadłej do osi przechodzącej przez materiał gałęzi ściskany element wielogałęziowy jest sprawdzany wytrzymałościowo jak pręt jednoga-

łęziowy. Nośność trzonu słupa jednogałęziowego ściskanego osiowo sprawdza się ze wzorów (30)÷(38) według procedury przedstawionej w rozdziale 10.2.

Natomiast przy wyboczeniu giętnym w płaszczyźnie prostopadłej do osi nieprzechodzącej przez materiał według PN-EN 1993 -1-1 pas słupa należy traktować jak pręt ściskany mimośrodowo i obliczać według zasad omówionych w rozdziale 8.

Sprawdzanie stanu granicznego nośności słupa dwugałęziowego względem osi nie przecinającej materiał gałęzi (rys. 34c) rozpoczyna się od wyznaczenia momentu bezwładności przekroju względem osi z-z wg wzoru

$$I_z = 0.5h_0^2 A_{ch} + 2I_{ch,z1}, (56)$$

gdzie:

 $h_0\;$ – odległości pomiędzy osiami pasów (gałęzi) słupa,

 A_{ch} – pole powierzchni pasa (gałęzi) słupa (rys. 34c),

 $I_{ch,z1}$ – moment bezwładności gałęzi słupa względem osi z_1 (rys. 34c).

Następnie należy obliczyć promień bezwładności przekroju

$$i = \sqrt{\frac{I_z}{2A_{ch}}} \quad , \tag{57}$$

oraz wyznaczyć smukłość elementu w analizowanej płaszczyźnie wg wzoru (8).

Kolejnym krokiem obliczeń jest wyznaczenie wskaźnika efektywności μ (wg tabl. 5) oraz zastępczego momentu bezwładności przekroju słupa I_{eff} ze wzoru

$$I_{eff} = 0.5h_0^2 A_{ch} + 2\mu I_{ch,z1},$$
(58)

co umożliwi obliczenie sztywności postaciowej słupa S_v ze wzoru (48) oraz zastępczej siły krytycznej elementu złożonego N_{cr} wg wzoru (47).

Ocenę nośności na wyboczenie w płaszczyźnie elementu (względem osi z_1 - rys. 34) słupa dwugałęziowego ściskanego osiowo należy przeprowadzić w dwóch przekrojach:

- w środku rozpiętości gałęzi oraz
- w przekroju przypodporowym.

W przekroju w środku rozpiętości słupa występuje maksymalny moment zginający M_{Ed} , który wyznacza się według wzoru (46), a siła poprzeczna V_{Ed} jest równa zeru. Nośność gałęzi ocenia się, przyjmując jej długość wyboczeniową równą osiowemu rozstawowi przewiązek a. Siłę ściskającą w pojedynczej gałęzi należy wyznaczyć według wzoru (45). Sprawdzenie nośności gałęzi słupa przeprowadza się ze wzoru (36), jak dla pręta jednogałęziowego.

W przekroju podporowym analizowanego słupa występuje maksymalna siła poprzeczna V_{Ed} , którą wyznacza się według wzoru (49), a moment zginający M_{Ed} jest równy zeru. Długość wyboczeniową gałęzi przyjmuje się równą osiowemu rozstawowi przewiązek a. W pojedynczej gałęzi występują następujące siły wewnętrzne:

$$N_{ch,Ed} = 0.5N_{Ed} \,, \tag{59}$$

$$V_{ch,Ed} = \pi \frac{M_{Ed}}{Ln},\tag{60}$$

$$M_{z1} = 0.5V_{ch,Ed}a. (61)$$

gdzie:

a – osiowy rozstaw przewiązek,

n~-liczba płaszczy
zn przewiązek przenoszących siłę poprzeczną $V_{{\it E}{\it d}}$

Nośność gałęzi trzonu słupa sprawdza się jak w przypadku jednogałęziowych prętów ściskanych mimośrodowo.

Gałęzie trzonu słupa są połączone przewiązkami lub skratowaniami (wiązaniami). Najczęściej są to połączenia spawane. Połączenia śrubowe stosuje się rzadko (np. gdy wymaga tego technologia montażu słupa). W konstrukcjach istniejących do połączenia gałęzi słupów z przewiązkami stosowano nity.

Przewiązki słupów i ich połączenia oblicza się na siłę rozwarstwiającą w osi słupa $V_{b,Ed}$, wywołaną siłą poprzeczną V_{Ed} (rys. 27b oraz rys. 34d). Trzon z przewiązkami poddany działaniu siły poprzecznej, można rozpatrywać jak ramę wielopiętrową o sztywnych węzłach (model obliczeniowy w postaci belki Vierendeela). W takim modelu obliczeniowym można przyjąć, że w gałęziach w połowie ich wysokości między przewiązkami i w osi przewiązek występują zerowe wartości momentów zginających. Przyjmując przeguby w tych przekrojach konstrukcji i rozpatrując warunek sumy momentów zginających względem tych punktów, w osi słupa (rys. 27, 34d) działają siły rozwarstwiające $V_{b,Ed}$. Przewiązka w słupie dwugałęziowym (rys. 34e) obciążona jest siłą poprzeczną i momentem zginającym o wartościach:

$$V_{b,Ed} = \frac{V_{Ed}a}{2h_0},\tag{62}$$

$$M_{b,Ed} = \frac{V_{Ed}a}{4},\tag{63}$$

Wysokość b_p przewiązki pośredniej nie powinna być mniejsza od 100 mm, przewiązek skrajnych zaś od 150 mm. Grubość przewiązki t_p przyjmuje się ze wzoru

$$t_p \ge \frac{b_p}{15}.$$
(64)

Przyjęty przekrój przewiązek sprawdza się na wytężenie zginające (63) i poprzeczne (62). Połączenie przewiązki ze słupem (rys. 34e, 34f, 36) musi spełniać warunki sztywnego zamocowania (oblicza się je na moment zginający i siłę poprzeczną wyznaczoną wg wzoru (62)).

Połączenie przewiązki z gałęzią słupa z zastosowaniem spoiny czołowej o grubości blachy przewiązki (rys. 34e) zgodnie z PN-EN 1993-1-8 nie wymaga sprawdzenia.

Połączenie zakładkowe przewiązki z gałęzią słupa (rys. 34f, 35) jest obciążone siłą poprzeczną $V_{b,Ed}$ i momentem zginającym $M = 0.5eV_{b,Ed}$, który oblicza się względem środka ciężkości 0 figury utworzonej przez kład powierzchni obliczeniowych spoin pachwinowych.



Rys. 35. Połączenie zakładkowe przewiązki z gałęzią słupa

Wówczas sprawdzając wytężenie spoin oblicza się

$$\tau_V = \frac{V_{b,Ed}}{\sum al},\tag{65}$$

$$\tau_M = \frac{Mr}{I_0},\tag{66}$$

$$\tau = \sqrt{\tau_{M_y}^2 + 3(\tau_{M_z} + \tau_V)^2} \le \frac{f_u}{\beta_w \gamma_{M2}},$$
(67)

gdzie:

 I_0 – biegunowy moment bezwładności figury obliczeniowej kładu spoin pachwinowych (rys. 36) względem środka 0, wyznaczonej ze wzoru

$$I_0 = I_v + I_z, \tag{68}$$

w którym: I_y , I_z – momenty bezwładności względem osi y i z kładu spoin,

 $\tau_{M},\,\tau_{My},\,\tau_{Mz}$ – składowe naprężeń wg rys. 36,

- $f_{\it u}$ nominalna wytrzymałość na rozciąganie stali słabszej z łączonych części,
- β_w współczynnik korekcyjny uwzględniający wyższe właściwości mechaniczne materiału spoiny w stosunku do materiału rodzimego; wartości współczynnika β_w podano w PN-EN 1993-1-8,
- $\gamma_{M2} = 1,25 \text{współczynnik częściowy dotyczący nośności spoin.}$

10.4. Projektowanie głowic słupów

Charakterystycznymi elementami konstrukcyjnymi słupów oprócz ich trzonów są głowica i podstawa. Głowica stanowi podporę rygla dachowego lub belek stopowych. Jej głównym zadaniem jest przejęcie obciążenia i przekazanie go na trzon. Głowica jest więc górną, końcową częścią słupa, która "zamyka" i usztywnia jego trzon, umożliwiając równocześnie połączenie go z ryglem dachowym lub belką stropową. Kształt i konstrukcja głowicy zależą od przekroju poprzecznego trzonu słupa, rodzaju i wartości przekazywanych obciążeń oraz spo-

sobu połączenia słupa z ryglem dachowym lub belką. Połączenie to może być przegubowe, sztywne lub podatne. W tym rozdziale zostaną omówione przegubowe połączenia słupów z podpieranymi elementami ustroju nośnego obiektu. Sztywne połączenia słupów z ryglami występują np. w ustrojach nośnych hal i szkieletach nośnych budynków.

W przypadku przegubowego oparcia rygla dachowego lub belki na słupie, przekazują one na głowicę siłę osiową (pionową) N_{Ed} i siłę poprzeczną V_{Ed} . Wówczas jej głównym elementem, zamykającym trzon, jest blacha pozioma oraz element centrujący. Blacha pozioma może być usztywniona bądź wzmocniona pionowymi elementami głowicy (tj. skrajnymi przewiązkami), przeponami, żeberkami usztywniającymi itp. Grubość blachy poziomej głowicy nie powinna być mniejsza od 10 mm. Wyznacza się ją z warunku nośności na zginanie, przyjmując schemat płyty lub belki opartej na krawędziach ścianek trzonu słupa lub na blachach pionowych (rys. 36). Zastosowanie pionowego żeberka usztywniającego (patrz rys. 36 i 37) sprawia, iż potrzebna jest znacznie mniejsza grubość blachy poziomej głowicy.



Rys. 36. Głowice pełnościennych słupów obciążonych osiowo: 1 - element centrujący, 2 - żebro

Nieosiowe przekazywanie obciążeń pionowych na trzon w istotny sposób zmniejsza jego nośność, gdyż wówczas jest on nie tylko ściskany, ale i zginany (nośność graniczna N_{gr} pręta ściskanego mimośrodowo jest mniejsza od jego nośności krytycznej N_{cr}). Stąd też w konstruowaniu słupów ważną sprawą jest zapewnienie osiowego przekazywania obciążenia. Elementy głowicy słupa ściskanego osiowo powinny być umieszczone symetrycznie względem osi trzonu. Osiowe przekazywanie obciążeń na trzon słupa zapewnia się stosując pod-

kładki centrujące (elementy centrujące), przyspawane do blachy poziomej głowicy słupa. Powinny one mieć możliwie małą szerokość b i grubość t co najmniej 20 mm. Jej wymiary dobiera się z warunku nie przekroczenia naprężeń na docisk dwóch płaskich powierzchni

$$\sigma_b = \frac{N_{Ed}}{ab} \le 1.25 \frac{f_y}{\gamma_{M0}},\tag{69}$$

gdzie:

 $N_{\it Ed}\,$ – obliczeniowa siła osiowa przekazywana na głowicę słupa,

a, b – szerokość i długość płytki centrującej,

 f_y – granica plastyczności stali,

 γ_{M0} – częściowy współczynnik nośności, γ_{M0} = 1,00.



Rys. 37. Głowice słupów dwugałęziowych obciążonych osiowo: 1 – element centrujący, 2 – żebro, 3 – blachy wzmacniające

Pod elementami centrującymi umieszcza się często prostopadłe lub równoległe do nich żebra pionowe (rys. 36, 37). Przyspawaną do blachy poziomej głowicy płytkę centrującą można uwzględnić jako współpracującą przy zginaniu tych elementów.

W blasze poziomej głowicy słupa są wywiercone otwory na śruby. Półkę dolną pełnościennego rygla lub blachę poziomą węzła podporowego kratownicy łączy się śrubami z blachą poziomą słupa. W celu zapobieżenia przesunięciom tych elementów względem siebie połączenie to wyposaża się w ograniczniki poziomego przesuwu. W celu ograniczenia powstawania momentu zamocowania rygla w słupie (przy założeniu ich przegubowego połączenia) śruby należy umieszczać możliwie blisko osi słupa. Rygiel ciągły wystarczy przymocować dwiema śrubami naprzemianległymi, natomiast każdy rygiel jednoprzęsłowy mocuje się do słupa dwiema śrubami naprzeciwległymi.

Jeżeli górne krawędzie trzonu słupa są sfrezowane (dopasowane) i stykają się szczelnie z blachą poziomą głowicy, to w obliczeniach można założyć, iż 75% siły obciążającej przejmuje trzon słupa w wyniku bezpośredniego docisku, a tylko 25% obciąża spoiny łączące blachę poziomą z trzonem i przewiązkami przygłowicowymi. Frezowanie końców słupa jest rzadko stosowane (w przypadku niektórych słupów o bardzo dużych obciążeniach głowicy).

10.5. Projektowanie podstaw słupów

Podstawa słupa (nazywana również stopą) jest dolną jego częścią, której głównym zadaniem konstrukcyjnym jest przekazanie obciążeń z trzonu na fundament. Elementy składowe podstawy "zamykają" od dołu i usztywniają trzon słupa. Ponadto konstrukcja podstawy umożliwia właściwe ustawienie słupa podczas montażu oraz zakotwienie go w fundamencie. Konstrukcja i kształt podstawy zależy od przekroju trzonu, schematu statycznego, rodzaju i wartości przekazywanych obciążeń z trzonu na fundament, oraz wymaganego sposobu jego działania (zakotwienia) w fundamencie.

Konstrukcja stopy słupa musi zapewniać przyjęte w modelu obliczeniowym warunki statyczne jego podparcia. Podstawa słupa może być połączona z fundamentem w sposób:

- sztywny w obu kierunkach; w styku tych elementów występują siła osiowa N_{Ed} , momenty zginające $M_{v,Ed}$, $M_{z,Ed}$ i siły poprzeczne $V_{v,Ed}$ oraz $V_{z,Ed}$,
- sztywny w płaszczyźnie układu poprzecznego, w której działa siła osiowa N_{Ed} , moment zginający $M_{y,Ed}$, siła poprzeczna $V_{y,Ed}$ oraz przegubowy w kierunku prostopadłym,
- przegubowy w obu kierunkach, w której działa siła osiowa N_{Ed} i siła poprzeczna $V_{v,Ed}$.

Głównym elementem podstawy każdego słupa jest blacha pozioma, "zamykająca" trzon słupa i zwiększająca jego powierzchnię docisku do betonu. Obciążenie z trzonu słupa przekazuje się poprzez docisk blachy poziomej na górną powierzchnię fundamentu (w przypadku małej powierzchni kontaktu tych elementów przekroczone byłyby parametry wytrzymałościowe betonu). Blacha pozioma wraz z odpowiednimi usztywnieniami powinna zapewnić docisk do betonowego fundamentu. Dociskowy model wytężenia blachy poziomej podstawy jest uwarunkowany małą jej odkształcalnością. Małe ugięcia wywołane odporem fundamentu można uzyskać stosując odpowiednio grube blachy poziome, co nie jest ekonomiczne, lub projektując cieńsze płyty poziome usztywnione żebrami pionowymi lub pionowymi blachami trapezowymi. Tylko podstawy "lekkich" słupów obciążonych osiowo (małymi siłami podłuż-nymi) mogą być o konstrukcji zbliżonej do głowic (bez blach pionowych, żeber, usztywnień). Słupy ściskane osiowo (połączone przegubowo z fundamentem) mogą mieć blachy poziome podstawy prostokątne lub zbliżone do kwadratu. Słupy ściskane i zginane jednokierunkowo mają blachy podstawy zazwyczaj prostokątne. Są one często znacznie wydłużone w stosunku do wymiaru trzonu słupa, tak aby podstawa słupa mogła przekazać na fundament również moment zginający $M_{v,Ed}$ i siłę poprzeczną $V_{v,Ed}$.

Na ukształtowanie podstawy słupa oprócz wymagań wynikających z przyjętego schematu statycznego trzonu (jako pręta połączonego w sposób przegubowy lub sztywny) ma również wpływ rodzaj zastosowanego zakotwienia podstawy w fundamencie.

Słupy ściskane osiowo łączy najczęściej się z fundamentem przegubowo, natomiast słupy ściskane mimośrodowo mają sztywne podstawy w płaszczyźnie działania momentu zginającego. Rzeczywiste, nominalnie przegubowe podstawy słupów mają zazwyczaj zdolność przenoszenia niedużych momentów zginających, powstających podczas montażu konstrukcji. Taką zdolność zapewnia konstrukcja podstawy i jej zakotwienie. Podstawy słupów projektuje się na ogół jako konstrukcje nieodkształcalne, przyjmując liniowo-sprężysty rozkład naprężeń dociskowych między poziomą płytą podstawy, a betonem fundamentu.

Najprostsza podstawa słupa, o połączeniu przegubowym, składa się tylko z poziomej blachy przyspawanej do trzonu (rys. 39). Jeśli powierzchnie czołowe trzonu (przylegające do blachy poziomej podstawy) są frezowane to w obliczeniach zakłada się, że 75% siły osiowej przekazuje się przez docisk, natomiast spoiny obwodowe przenoszą 25% siły N_{Ed} .

Zgodnie z PN-EN 1993-1-8 obliczeniową nośność $N_{j,Rd}$ symetrycznej blachy podstawy słupa, poddanej podłużnej sile ściskającej przyłożonej osiowo, można wyznaczyć, sumując poszczególne, obliczeniowe nośności $F_{C,Rd}$ trzech króćców teowych pokazanych na rys. 39 (dwa króćce teowe ① pod pasami i jeden króciec teowy ② pod środnikiem słupa dwuteowego). Trzy króćce teowe nie powinny zachodzić na siebie (patrz rys. 38d). Nośność obliczeniowa każdej z tych części oblicza się według podanej niżej metody.

W połączeniu stali z betonem półka zastępczego króćca teowego może być stosowana do modelowania wytężenia następujących części podstawowych:

- stalowej blachy podstawy w warunkach zginania od odporu fundamentu oraz
- betonu i/lub podlewki przy docisku.



Rys. 38. Schemat obliczeniowy podstawy słupa ściskanego osiowo (a); strefa docisku pod zastępczym króćcem teowym: b – mały wysięg blachy poziomej, c – duży wysięg blachy poziomej; d – odrębne króćce teowe

Sumaryczna długość efektywna l_{eff} i sumaryczna szerokość efektywna b_{eff} zastępczego króćca teowego powinny być takie, aby obliczeniowa nośność przy ściskaniu króćca teowego była równoważna nośności części podstawowej, która jest odwzorowywana. Długość efektywna l_{eff} i szerokość efektywna b_{eff} zastępczego króćca teowego są wartościami umownymi i mogą różnić się od wymiarów części podstawowe, która jest odwzorowywana (rys. 38d).

Obliczeniowa nośność przy ściskaniu króćca teowego $F_{C,Rd}$ jest określona wzorem

$$F_{C,Rd} = f_{jd} b_{eff} l_{eff} , \qquad (70)$$

gdzie:

 b_{eff} – efektywna szerokość króćca teowego,

 l_{eff} – efektywna długość zastępczego króćca teowego,

 $f_{\it jd}$ – obliczeniowa wytrzymałość połączenia na docisk, którą oblicza się z zależności

$$f_{jd} = \beta_j \frac{F_{Rdu}}{b_{eff} l_{eff}},\tag{71}$$

65

w którym:

- β_j współczynnik materiałowy; można przyjąć $\beta_j = 2/3$ pod warunkiem, że wytrzymałość charakterystyczna podlewki jest nie mniejsza niż 1/5 charakterystycznej wytrzymałości betonu zastosowanego na fundament, a grubość podlewki jest nie mniejsza niż 0,2 mniejszej szerokości stalowej blachy podstawy. Gdy grubość podlewki jest większa niż 50 mm, to charakterystyczna wytrzymałość podlewki nie powinna być mniejsza niż wytrzymałość betonu fundamentu,
- F_{Rdu} obliczeniowa nośność przy sile skupionej, określona w PN-EN 1992, przy czym A_{c0} należy przyjmować: $b_{eff} x l_{eff}$.

Przyjmuje się, że siły przenoszone przez króciec teowy są rozłożone równomiernie, co pokazano na rys. 38a. Ciśnienie w obliczonym polu docisku nie powinno przekraczać obliczeniowej nośności na docisk f_{jd} , przy czym maksymalny wysięg strefy docisku c jest określony wzorem:

$$c = \sqrt{\frac{f_y}{3f_{jd}\gamma_{M0}}},\tag{72}$$

gdzie:

t – grubość półki króćca teowego,

 f_y – granica plastyczności stali,

 $\gamma_{M\,0}$ – częściowy współczynnik nośności
, $\gamma_{M\,0}$ = 1,00 .

Gdy wysięg podstawowej części węzła, odwzorowywanej przez króciec teowy, jest mniejszy niż c, to efektywną strefę docisku ustala się w sposób pokazany na rys. 38b.

Gdy wysięg podstawowej części węzła, odwzorowywanej przez króciec teowy, przekracza wartość c z którejkolwiek strony, to parametr c ogranicza strefę docisku, patrz rys. 38c.

Grubość nieużebrowanej blachy poziomej podstawy lekkiego słupa ściskanego osiowo (bez blach trapezowych – rys. 39a) można oszacować również ze wzoru

$$t_p = 1.7 \sqrt{\frac{b_f h \sigma_c \gamma_{M0}}{m f_y}}, \qquad (73)$$

gdzie:

 \boldsymbol{b}_f , \boldsymbol{h} – szerokość półki (stopki) i wysokość przekroju dwute
ownika,

 f_y – granica plastyczności stali,

 γ_{M0} – częściowy współczynnik w ocenie nośności, γ_{M0} = 1,00,

 σ_{c} – naprężenia obliczeniowe na docisk pod podstawą, które wyznacza się ze wzoru

$$\sigma_c = \frac{N_{\max}}{a_p b_p} \le f_b, \qquad (74)$$

gdzie: f_b – wytrzymałość obliczeniowa betonu na docisk określona w PN-EN 1992. Wartość współczynnika *m* we wzorze (73) do obliczania grubości blachy podstawy lekkiego słupa dwuteowego ściskanego osiowo podano w tabl. 6.



Rys. 39. Nieusztywniona (a) i usztywniona (b) podstawa słupa dwuteowego

Tablica 6. Współczynnik m do obliczania grubości blachy poziomej podstawy lekkiego słupaściskanego osiowo

	IPE	HE						
Dwuteowniki	IPN	≤ 300	360	400	450	500	550	600
т	8,0	7,0	7,1	7,4	7,8	8,1	8,6	9,1

Grubość poziomej blachy podstawy słupów o dowolnych przekrojach trzonu i o konstrukcjach z blachami trapezowymi i żebrami pionowymi można obliczyć, wykorzystując nośność na zginanie poszczególnych płyt umownych, dających się wyróżnić w całym polu podstawy. Blachy poziome podstawy pokazane na rys. 39, o schematach płyt wspornikowych (płyta ^①), podpartych na dwóch (płyta ^②), trzech (płyta ^③) i czterech (płyta ^④) krawędziach są zginane odporem od docisku między płytą podstawy a fundamentem. Podporami poszczególnych płyt są krawędzie trzonu, blachy trapezowe i żebra podstawy, a ich obciążenie jest skierowane ku górze. Grubość blachy poziomej dowolnej podstawy słupa oblicza się ze wzoru

$$t_p = \omega \sqrt{\frac{\sigma_c \gamma_{M0}}{f_y}}, \tag{75}$$

gdzie:

 σ_c – równomiernie rozłożone naprężenie od docisku pod blachą podstawy, w rozpatrywanym polu płyty,

 f_{y} , γ_{M0} – jak w (73),

- ω współczynnik określający wpływ momentu zginającego w rozpatrywanej umownej płycie, którego wartość przyjmuje się:
 - dla płyty wspornikowej (o wysięgu c, podpartej na 1 krawędzi), $\omega = 1,732c$,
 - dla płyt prostokątnych podpartych na dwóch, trzech lub czterech krawędziach wg tabl. 7, dla płyt kołowych i pierścieniowych wg tabl. 8.

W celu wyznaczenia grubości płyty t_p do wzoru (75) należy wstawić największą wartość ω , wynikającą z analizy umownych płyt wydzielonych z podstawy.

W przypadku konieczności stosowania grubych blach poziomych podstawy korzystniej jest usztywniać je żebrami lub blachami trapezowymi i zastosować płyty o mniejszej grubości. Wysokość żeber h ustala się na podstawie wymaganej nośności spoin, przy założeniu o niestykaniu się czołowej powierzchni trzonu z płytą poziomą podstawy.

Przykłady rozwiązań konstrukcyjnych podstaw słupów połączonych przegubowo z fundamentem pokazano na rys. 40 i 41.

Pokazane na rys. 40 przykłady podstaw słupów przenoszą niewielkie wartości momentów zginających. Dla obciążeń osiowych i małych przemieszczeń ustroju mogą one być uznane za przegubowe. Dla dużych wartości sił osiowych, gdy zachodzi konieczność usztywnienia blachy poziomej podstawy, są one wyposażane w żebra i blachy trapezowe.

	$\frac{b}{l}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	$\frac{\omega}{l}$	0,795	0,914	1,008	1,084	1,139	1,187
	$\frac{b}{l}$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
3	$\frac{\omega}{l}$	0,488	0,595	0,661	0,697	0,714	0,720
	$\frac{b}{l}$	0,9	1,0	1,1	$1,\!2$	1,5	2,0
	$\frac{\omega}{l}$	0,721	0,719	0,718	0,714	0,711	0,707
<u>م</u> (4)	$\frac{b}{l}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	$\frac{\omega}{l}$	0,354	0,414	0,466	0,506	0,537	0,556

Tablica 7. Współczynniki $\frac{\omega}{l}$ dla płyt prostokątnych

Tablica 8. Współczynniki $\frac{\omega}{d}$ dla płyt kołowych i pierścieniowych

Schemat		$\frac{I}{c}$	$\frac{D}{d}$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6 🔹
		$\underline{\omega}$	k)	0,545	0,526	0,495	0,447	0,391	0,473	0,553
k) <u>A</u> d	Δ	d	p)	0	0,293	0,440	0,571	0,695	0,817	0,939
	$\frac{1}{a}$	$\frac{D}{l}$	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,5	
× D	*	$\underline{\omega}$	k)	0,637	0,721	0,804	0,888	0,975	1,062	1,363
		d	p)	1,061	1,183	1,307	1,431	1,556	1,684	2,071
k) — płyty koliste, p) — płyty pierścieniowe										

Precyzyjne odwzorowanie konstrukcyjne teoretycznego modelu przegubowego połączenia słupa z fundamentem, uzyskuje się stosując rozwiązania pokazane na rys. 41. Umożliwiają one swobodny obrót słupa na podporze i bezmomentowe przekazanie reakcji na fundament.



Rys. 40. Przykłady konstrukcji podstaw słupów ściskanych osiowo

W rozwiązaniach według rys. 41 obciążenie ze słupów 1 przekazuje się na fundament za pośrednictwem elementów wsporczych 2. Elementy wsporcze 2 są połączone śrubami kotwiącymi 3 z fundamentem. Jeśli słup przekazuje na fundament oprócz pionowej siły osiowej N_{Ed} również poziomą siłę poprzeczną V_{Ed} , dolną płytę elementu wsporczego 2 wyposaża się w element oporowy 4, w postaci żebra poprzecznego. Uniemożliwia ono przesunięcie elementu wsporczego 2 względem fundamentu. Takie rozwiązanie stosuje się, gdy siła poprzeczna V_{Ed} jest większa od nośności podstawy na przesunięcie $F_{s,Rd} = \mu N_{Ed,min}$ (gdzie: $\mu = 0.3$ – współczynnik tarcia blachy po fundamencie, $N_{Ed,min}$ – minimalna siła osiowa słupa z uwzględnieniem współczynnika obciążenia $\gamma_{F,i} \leq 1,0$). W takiej sytuacji siła poprzeczna V_{Ed} przekazuje się na fundament przez docisk elementu oporowego (żebra poprzecznego) do betonu. Słup podparty przegubowo jest na ogół dość wąski, albo zwężony do dołu, co ułatwia konstrukcję podparcia. Reakcję przekazuje element poziomy o płaskiej lub stycznej powierzchni docisku przyspawany do blachy poziomej słupa (rys. 41a) lub blachy poziomej elementu wsporczego (rys. 41, c). W rozwiązaniu przegubowego oparcia słupa kratowego, pokazanego na rys. 41d, obciążenie na element wsporczy jest przekazywane za pośrednictwem stalowego sworznia lub śruby.



Rys. 41. Przykłady konstrukcji przegubowych połączeń słupów z fundamentem: 1 – słup, 2 – element wsporczy, 3 – śruba kotwiąca, 4 – element oporowy

Podstawy słupów przenoszące siłę osiową, moment zginający M i siłę poprzeczną V są nieco inaczej skonstruowane i wymagają one również rozszerzonego zakresu obliczeń, w stosunku do przypadku ich osiowego obciążenia. Modele wytężenia takich podstaw słupów są omówione w PN-EN 1993-1-8.

10.6. Zakotwienie słupów w fundamencie

Zespolenie podstaw słupów z fundamentami (betonowymi lub żelbetowymi) zapewniają śruby kotwiące. Charakterystyczne rodzaje śrub kotwiących pokazano na rys. 42. Są one wykonane ze stalowych prętów okrągłych. Jeden koniec śruby kotwiącej jest nagwintowany, drugi zaś ukształtowany tak, aby uzyskać dobre zakotwienie w betonie lub belce kotwiącej osadzonej w fundamencie. Śruby te mają za zadanie prawidłowe ustawienie słupa na fundamencie, zapobieganie przemieszczeniu się konstrukcji podczas montażu (zapewnienie stabilności), a przede wszystkim przekazanie obciążeń prętowego ustroju nośnego na fundament.

71



Rys. 42. Śruby fundamentowe (opis w tekście)

Podstawy słupów obciążonych osiowo kotwi się z fundamentem za pomocą przynajmniej dwóch śrub. W słupach osiowo ściskanych łączniki te pełnią rolę stabilizującą na czas montażu. Są one potrzebne z uwagi na możliwość wystąpienia nieprzewidzianych sił poziomych podczas scalania konstrukcji. Jeśli dolny koniec słupa był traktowany jako przegubowonieprzesuwny, to dwie śruby należy umieszczać na potencjalnej osi obrotu przekroju podporowego podczas ewentualnego zginania (rys. 42a, b, d). Gdy to jest niemożliwe to należy je umieszczać jak najbliżej osi obrotu, aby zapewnić założoną pracę statyczną słupa.

Do łączenia słupów ściskanych osiowo z fundamentem używa się śrub o średnicach 16÷30 mm. Głębokość zakotwienia śrub ze stali okrągłej powinna wynosić około 20 średnic. Do zakotwienia można użyć śrub: z rozciętym końcem (rys. 42a), z odgiętym końcem (rys. 42b), zgrubnych z krótkim gwintem o odpowiedniej długości (rys. 42c), fajkowych (rys. 42d, e), płytkowych (rys. 42f, g), młotkowych (rys. 42h), a także śrub rozporowych (rys. 42i) lub kotew wklejanych (rys. 42j). Kotwy (rys. 42b, f,) mogą być zabetonowane razem z fundamentem lub osadzone w uprzednio wykonanych kanałach kotwiących (otworach, studzienkach) w fundamencie (rys. 42a, b, e, h, i, j). W przypadku śrub kotwiących rozporowych i wklejanych (rys. 42i, j) osadza się je w otworach wierconych w fundamentach po ostatecznym ustaleniu

72
usytuowania słupów. Osadzenie śrub w kanałach kotwiących lub wierconych otworach umożliwia gubienie losowych odchyłek wykonawczych.

Możliwość niewielkiej regulacji położenia kotwy fajkowej ułatwia rozwiązanie pokazane na rys. 42d. Jeśli śrubę zabetonowuje się łącznie ze stalowym stelażem, stabilizującym położenie śrub względem siebie podczas betonowania, należy wykonać powiększone otwory w blasze poziomej podstawy słupa (rys. 40d). Otwory te mają średnicę $d_0 = d + 2\Delta$ ($\Delta = 2$ mm, dla $d \le 24$ mm oraz $\Delta = 3$ mm) lub $d_0 = (1,5 + 2,5)d$. W tym ostatnim przypadku, po wykonaniu regulacji ustawienia słupa, na śruby nakłada się indywidualnie wykonane podkładki kwadratowe, z normowymi otworami (przykrywające powiększone otwory), zakłada spoinę i dopiero wtedy zakłada się podkładkę standardową i nakrętkę (rys. 40d). Taką regulację słupa umożliwia również rozwiązanie pokazane na rys. 40b.

W słupach utwierdzonych w fundamentach konstruuje się podstawy z blachami pionowymi równoległymi do płaszczyzny zginania, a śruby kotwiące rozmieszcza jak najdalej od osi obrotu. Śruby kotwiące takich słupów, przeciwdziałając odrywaniu podstawy od fundamentu, są rozciągane. Dlatego też istnieje potrzeba zagwarantowania właściwego ich zespolenia z fundamentem.

Śruby fajkowe (rys. 42d, e) przenoszą obciążenie dzięki przyczepności stali do betonu lub przez zakotwienie haka (w trakcie montażu), śruby płytkowe (rys. 42f, g) przez docisk płytki oporowej do betonu, śruby młotkowe (rys. 42h) przez docisk do belki kotwiącej zabetonowanej w fundamencie, śruby rozporowe (rys. 42i) przez tarcie i docisk do betonu, a śruby wklejane (rys. 42j) dzięki przyczepności kleju (żywic) do stali i betonu.

Parametry wytrzymałościowe (nośności) i geometryczne (pole przekroju poprzecznego) oraz minimalną długość zakotwienia śrub fajkowych i płytkowych podano w tabl. 9. Podobne parametry dla śrub rozporowych i wklejanych podają producenci tych wyrobów.

Śruby fajkowe wykonuje się ze stali gatunku S235, natomiast płytkowe i młotkowe ze stali S355. Kotwy fajkowe oznacza się symbolem F i liczbą odpowiadającą jej średnicy (F12, F16, F20, F30). Śruby płytkowe są oznaczane literą P, młotkowe zaś T i liczbami oznaczającymi średnicę ich trzpienia (P20÷P48, T36÷T80).

Śruby fajkowe i płytkowe można osadzać w fundamencie w czasie jego betonowania, jednak zamocowanie ich z dokładnością wymaganą do montażu konstrukcji stalowych jest na ogół niewykonalne. Dlatego też zazwyczaj osadza się je w studzienkach wykonanych w fundamencie (rys. 43 i 44) lub stosuje powiększone otwory w płycie poziomej podstawy słupa. Śruby młotkowe oraz fajkowe (gdy nie uwzględnia się ich przyczepności do betonu) są kotwione w fundamencie przez docisk do osadzonych w nich stalowych beleczek.

	Średnica	Przekrój	Nośność	Długość ^{2/}	Długość	Wymiary	Moment	
	gwintu	czynny	$S_{R}^{1/}$	zakotwie-	dokręcenia	płytki opo-	dokręcania	
Тур		A_s		nia l_a	min l_d	rowej $a \times t$	M_o	
	mm	mm^2	kN	mm	cm	mm	Nm	
	12	85	17	580	45	-	50	
Fajkowe	16	157	31	770	50	-	100	
- stal S235	20	245	47	900	55	-	150	
wg rys. 42d, e	24	353	67	1080	60	-	200	
	30	561	107	1330	70	-	300	
Płytkowe - stal S355 wg rys. 42f, g	20	245	72	500	55	100×20	150	
	24	353	103	500	60	110×20	200	
	30	561	164	650	70	120×20	300	
	36	817	233	800	80	130×20	500	
	42	1120	319	900	85	150×20	800	
	48	1472	419	1000	90	170×20	950	
^{1/} Nośność kotwi $S_R = S_{Rt} \leq S_{Ra}$.								
$^{2'}$ Minimalna długość zakotwienia podano dla betonu klasy B15. W przypadku betonu wyższej klasy								

Tablica 9. Charakterystyka fajkowych i płytkowych śrub kotwiących

² Minimalną długość zakotwienia podano dla betonu klasy B15. W przypadku betonu wyższej klasy podane wartości należy pomnożyć przez $\sqrt{12/f_{ck}}$; gdzie: f_{ck} - wg PN-EN 1992.

Beleczki kotwiące z kątowników stosuje się dla śrub hakowych, z dwóch ceowników zaś w przypadku śrub młotkowych. Elementy kotwiące betonuje się razem z fundamentem, zostawiając otwory (studzienki) na śruby. Pozostawienie otworów na śruby w fundamencie wymaga deskowania w celu wykonania studzienki i zabetonowania szczelnej skrzynki z cienkiej blachy pod kątowniki lub ceowniki belek kotwiących. Podczas montażu śruby wstawia się w studzienki i zaczepia o belki kotwiące, a następnie łączy z podstawą słupa. W tym przypadku możliwe są niewielkie przesunięcia słupa względem fundamentu, w celu ustawienia go w osiach i "zgubienia" geometrycznych niedokładności wykonawczych. Studzienki w czasie między betonowaniem a montażem powinny być zabezpieczone przed zanieczyszczeniami i zalaniem wodą opadową. Realizacja kotwienia słupów z zastosowaniem śrub zaczepionych w belkach kotwiących osadzonych w fundamencie jest kłopotliwa technologicznie i stosunkowo droga. Takie rozwiązania są stosowane w przypadku dużych sił kotwiących słup w fundamencie.

Konstrukcję zakotwienia słupa z zastosowaniem kotwy fajkowej pokazano na rys. 43. Parametry geometryczne tego zakotwienia podano w tabl. 10.

Konstrukcję zakotwienia słupa z zastosowaniem kotwy młotkowej pokazano na rys. 44. Parametry geometryczne tego zakotwienia podano w tabl. 11.



Rys. 43. Zakotwienie słupa z zastosowaniem kotwy fajkowej

Średnica		Wymiary gniazda					Wymiary śruby		
śruby <i>d</i>	Przekrój belki kotwiącej z kątow-	k	W	b	t	Т	l	р	g
mm	nika				m	n			
M16	65 x 65 x 7	≥150	80	80	110	560	450	35	100
M20	75 x 75 x 8	≥160	100	90	120	680	560	40	110
M24	90 x 90 x 9	≥ 190	120	110	130	790	660	45	110
M27	100 x 100 x 12	≥ 220	140	130	140	900	760	50	120
M30	120 x 120 x 11	≥ 250	150	150	150	1010	860	55	120

Tablica 10. Parametry geometryczne zakotwienia wg rys. 43

Tablica 11. Parametry geometryczne zakotwienia wg rys. 44

Śruba	M24	M27	M30	M36	M39	M42	M45	M48
Parametry geome- tryczne do rys. 45 mm] [65] [80] [80] [80][100][100][120][120
у	35	40	40	40	50	60	60	65
k	≥200	≥220	≥ 220	≥ 220	≥ 240	≥260	≥ 280	≥ 300
п	105	110	110	110	130	140	150	155
f	35	37	37	37	42	42	47	47
0	15	15	15	15	20	20	22	22
и	40	41	41	41	45	46	50	52
W	120	120	150	150	160	170	180	190
t	120	120	120	120	130	130	140	150
Т	980	1040	1040	1040	1150	1250	1360	1450
l	860	920	920	920	1020	1120	1220	1300
р	45	60	60	60	65	70	75	80
g	110	130	130	130	130	140	140	160
r	20	23	25	30	33	35	37	40
S	24	27	30	36	40	42	45	48
Z	60	65	70	85	95	110	110	115



Rys. 44. Zakotwienie słupa z zastosowaniem kotwy młotkowej

Znacznie łatwiejsze technologicznie jest zastosowanie kotew rozporowych (rys. 43i) i wklejanych (rys. 43j). Wówczas fundament jest prostszy konstrukcyjnie i wykonanie jego nie wymaga takiej dokładności jak w przypadku hakowych lub fajkowych śrub kotwiących. Po wytrasowaniu osi usytuowania śrub rozporowych lub wklejanych wierci się w fundamencie otwory do ich osadzenia. Przykład konstrukcji i zasady działania śruby rozporowej pokazano na rys. 45.



Rys. 45. Konstrukcja (a) i zasada działania (b) śruby rozporowej: 1 – śruba, 2 i 3 – segmenty rozporowe, 4 – nakrętka, 5 – łączony element, 6 – fundament, 7 – podkładka

Nośność zakotwienia kotwy fajkowej (nie mocowanej w belce kotwiącej) wyznacza się z warunku jej przyczepności do betonu, kotwy zaś płytkowej - ze względu na docisk płytki oporowej do betonu. W przypadku zakotwienia z belką kotwiącą osadzoną w fundamencie, nośność belki oblicza się ze względu na jej docisk do betonu i ścinanie przyjmując odpowiednie wartości pola obwodu strefy docisku belki, przypadające na jedną kotew. Nośność połączenia śruby kotwiącej z belką i strefy jego połączenia nie powinny być mniejsze od nośności zakotwienia belki. Wymagania techniczne i nośności zakotwień rozporowych i wklejanych są podawane w aprobatach technicznych tych wyrobów.

Literatura

- Biegus A.: Nośność graniczna stalowych konstrukcji prętowych. PWN, Warszawa Wrocław, 1997.
- [2] Biegus A.: Połączenia śrubowe. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa Wrocław 1997.
- [3] Biegus A.: Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych. PWN, Warszawa Wrocław 1999.
- [4] Biegus A.: Stalowe budynki halowe. Arkady, Warszawa 2003.
- [5] Biegus A.: Zgodnie z Eurokodem 3. Część 4: Wymiarowanie przekrojów. Builder nr 5/2009.
- [6] Biegus A.: Zgodnie z Eurokodem 3. Część 6: Wymiarowanie elementów. Builder nr 6/2009.
- [7] Biegus A.: Obliczanie spoin według Eurokodu 3. Builder nr 11/2009.
- [8] Biegus A.: Obliczanie nośności śrub według PN-EN 1993-1-8. Inżynieria i Budownictwo nr 3/2008.
- [9] Giżejowski M., Wierzbicki S., Kubiszyn W.: Projektowanie elementów zginanych według PN-EN 1993-1-1 i PN-EN 1993-1-5. Inżynieria i Budownictwo nr 3/2008.
- [10] Giżejowski M., Barszcz A., Ślęczka L.: Ogólne zasady projektowania stalowych układów ramowych według PN-EN 1993-1-1. Inżynieria i Budownictwo nr 7/2008.
- [11] Kozłowski A., Stankiewicz B., Wojnar A.: Obliczanie elementów zginanych i ściskanych według PN-EN 1993-1-1. Inżynieria i Budownictwo nr 9/2008.
- [12] Kozłowski A., Pisarek Z., Wierzbicki S.: Projektowanie doczołowych połączeń śrubowych według PN-EN 1993-1-1 i PN-EN 1993-1-8. Inżynieria i Budownictwo nr 4/2009.
- [13] Kiełbasa Z., Kozłowski A., Kubiszyn W., Pisarek S., Reichhart A., Stankiewicz B., Ślęczka L., Wojnar A.: Konstrukcje stalowe. Przykłady obliczeń według PN-EN 1993-1. Część pierwsza. Wybrane elementy i połączenia. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej. Rzeszów 2009.
- [14] Pałkowski Sz.: Konstrukcje stalowe. Wybrane zagadnienia obliczania i projektowania, PWN, Warszawa 2001.
- [15] Pałkowski S., Popiołek K.: Zwichrzenie belek ogólne zasady projektowania stalowych układów ramowych według PN-EN 1993-1-1. Inżynieria i Budownictwo nr 7/2008.
- [16] PN-90/B- 03200 Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.
- [17] PN-EN 1990: 2004. Podstawy projektowania konstrukcji.

- [18] PN-EN 1993-1-1: 2006. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- [19] PN-EN 1993-1-2: 2007. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-2:
 Reguły ogólne Obliczanie konstrukcji z uwagi na warunki pożarowe.
- [20] PN-EN 1993-1-3: 2008. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych Część 1-3: Reguły ogólne – Reguły uzupełniające dla konstrukcji z kształtowników i blach profilowanych na zimno.
- [21] PN-EN 1993-1-4: 2007. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych Część 1-4:
 Reguły ogólne Reguły uzupełniające dla konstrukcji ze stali niedrzewnych.
- [22] PN-EN 1993-1-5: 2008. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-5: Blachownice.
- [23] PN-EN 1993-1-6: 2009. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-6: Wytrzymałość i stateczność konstrukcji powłokowych.
- [24] PN-EN 1993-1-7: 2008. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-7: Konstrukcje płytowe.
- [25] PN-EN 1993-1-8: 2006 Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-8: Projektowanie węzłów.
- [26] PN-EN-1993-1-9: 2007. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-9: Zmęczenie.
- [27] PN-EN-1993-1-10: 2007. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-10: Dobór stali ze względu na odporność na kruche pękanie i ciągliwość międzywarstwową.
- [28] PN-EN-1993-1-11: 2007. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-11: Konstrukcje cięgnowe.
- [29] PN-EN-1993-1-12: 2007. Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-12: Reguły dodatkowe rozszerzające zakres stosowania EN 1993 o gatunki stali wysokiej wytrzymałości do z S 700 włącznie.
- [30] PN-EN 1090-2:2009. Wykonanie konstrukcji stalowych i aluminiowych. Część 2: Wymagania techniczne dotyczące konstrukcji stalowych.
- [31] Rykaluk K.: Konstrukcje stalowe. Podstawy i elementy. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2006.
- [32] Timoshenko S. P., Gere J. M.: Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa 1963.
- [33] Winter G.: Strength of Thin Steel Compression Flange. Trans. ACSE, 1974, vol. 112.